



Kuivamäki Anna

Matemaattiset oppimisvaikeudet ja oppimisen tuki

Kandidaatintutkielma  
KASVATUSTIETEIDEN TIEDEKUNTA  
Erityispedagogiikka  
2020

Tutkielman aiheena on matemaattiset oppimisvaikeudet ja matematiikan oppimisen tukeminen. Tavoitteena on selvittää, miten matemaattiset oppimisvaikeudet ilmenevät ja mistä ne johtuvat. Lisäksi tutkielmassa kartoitetaan, miten oppilaat, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, tunnistetaan ja millaisia keinoja matematiikan oppimisen tukemisessa voidaan käyttää.

Tutkielma on toteutettu kuvailevana kirjallisuuskatsauksena. Kuvailevan kirjallisuuskatsauksen tavoitteena on muodostaa yleiskatsaus tutkittavasta aiheesta ja tutkittavaa ilmiötä pyritään kuvailemaan kokonaisvaltaisesti. Tavoitteena on vastata kahteen tutkimuskysymykseen: mitä matemaattiset oppimisvaikeudet ovat ja miten lapsia, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, voidaan tukea.

Matemaattiset oppimisvaikeudet voidaan jakaa dyskalkuliaan ja heikkoon matemaattiseen osaamiseen. Dyskalkulia on vakava-asteisempi oppimisvaikeus, jossa vaikeudet ilmenevät peruslaskutaidoissa ja jonka taustasyynä on vajavaisuudet kognitiivisissa taidoissa. Heikko matemaattinen osaaminen on lieväasteisempi oppimisen ongelma, jonka taustasyynä voi olla monet eri tekijät kuten kognitiiviset, motivationaaliset tai sosiaaliset tekijät. Matemaattiset oppimisvaikeudet voivat myös ilmetä päällekkäisenä jonkin toisen oppimisvaikeuden kanssa.

Matemaattista osaamista voidaan arvioida erilaisilla kriteeri- ja normiperustaisilla seuloilla ja testeillä sekä opetussuunnitelmaan perustuvilla arviointimenetelmillä. Matematiikan oppimista voidaan tukea esimerkiksi eksplisiittisellä ja yksilöllisellä opetuksella, drillaaavilla harjoitteilla tai laskustrategioiden opettamisella. Suomessa on myös käytössä erilaisia tutkimusperustaisia harjoitusohjelmia matematiikan oppimisen tukemiseen.

Aluksi tutkielmassa käsitellään tutkielman lähtökohtia ja sen kulkua, jonka jälkeen teoreettisessa viitekehyksessä käsitellään matematiikan oppimista ja oppimisvaikeuksia yleisesti. Tämän jälkeen vastataan tutkimuskysymyksiin. Lopuksi johtopäätöksissä kootaan tutkielman keskeisimmät tulokset ja pohdinnassa selvitetään tutkielman luotettavuutta ja tuodaan esille mahdollisia jatkotutkimusaiheita.

Avainsanat: matematiikan oppiminen, varhaiset matemaattiset taidot, matemaattiset oppimisvaikeudet, dyskalkulia, varhainen tunnistaminen, oppimisen tuki

This thesis explores mathematical learning difficulties and how one can support mathematical learning. The aim is to find out how mathematical learning difficulties manifest themselves and what are the reasons behind them. In addition, the thesis explores how students with mathematical learning difficulties are identified and what means can be used to support mathematical learning.

The thesis has been implemented as a descriptive literature review. The aim of the descriptive literature review is to form an overview of the research topic and the aim is to describe the research phenomenon holistically. The aim is to answer two research questions: what mathematical learning difficulties are and how can children with mathematical learning difficulties be supported.

Mathematical learning difficulties can be divided into dyscalculia and poor mathematical achievement. Dyscalculia is a more severe learning disability in which the difficulty manifests itself in basic numeracy skills and which is due to deficiencies in cognitive skills. Poor mathematical competence is a milder learning problem that can be caused by many different factors such as cognitive, motivational, or social factors. Mathematical learning difficulties may also overlap with another learning difficulty.

Mathematical competence can be assessed through various criteria- and norm-based screens and tests, as well as curriculum-based assessment methods. Mathematical learning can be supported by, for example, explicit and individual teaching, drilling exercises or teaching calculation strategies. Finland also has various research-based training programs in place to support mathematical learning.

First, the thesis deals with the starting points of the thesis and its course, after which the theoretical framework deals with mathematical learning and learning difficulties in general. After this, the research questions are answered. Finally, the conclusions summarize the main results of the thesis and the reflection examines the reliability of the thesis and highlights possible topics for further research.

Keywords: mathematical learning, early mathematical skills, mathematical learning difficulties, dyscalculia, early identification, support in learning

# Sisältö

<b>1 Johdanto.....</b>	<b>5</b>
<b>2 Tutkielman lähtökohdat .....</b>	<b>7</b>
2.1 Tutkielman kulku .....	7
2.2 Tutkimuskysymykset .....	9
<b>3 Matematiikan oppiminen ja oppimisvaikeudet .....</b>	<b>10</b>
3.1 Matematiikan oppiminen .....	10
3.2 Oppimisvaikeudet.....	14
3.2.1. Laaja-alaiset oppimisvaikeudet .....	15
3.2.2 Erityiset oppimisvaikeudet.....	16
<b>4 Matemaattiset oppimisvaikeudet .....</b>	<b>18</b>
4.1 Ongelmat matematiikan oppimisessa .....	20
4.2 Kognitiiviset taustatekijät .....	21
4.3 Pääallekkäistyminen .....	23
<b>5 Oppimisen tuki matemaattisissa oppimisvaikeuksissa.....</b>	<b>25</b>
5.1 Varhainen tunnistaminen .....	25
5.2 Arviointi.....	27
5.3 Tukikeinoja.....	30
5.4 Tutkimusperustaiset harjoitusohjelmat .....	32
<b>6 Johtopäätökset.....</b>	<b>35</b>
<b>7 Pohdinta .....</b>	<b>37</b>
<b>8 Lähteet.....</b>	<b>39</b>

# 1 Johdanto

Tämän tutkielman aiheena on matemaattiset oppimisvaikeudet ja oppimisen tuki matematiikassa. Tutkielmassa tuodaan esille matemaattisten oppimisvaikeuksien luonnetta ja sitä, miten lapsia, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, voidaan tukea. Lisäksi tutkielmassa tarkastellaan matematiikan oppimista keskittyen etenkin matematiikan varhaisiin taitoihin, jotka kehittyvät varhaisessa vaiheessa ennen kouluikää. Tutkielmassa käsitellään myös oppimisvaikeuksia yleisesti.

Tutkielmani aihe, matemaattiset oppimisvaikeudet, syntyi omasta mielenkiinnostani aihetta kohtaan. Matemaattinen osaamiseni on ollut vaihtelevaa ja etenkin peruskoulun viimeisillä luokilla uusien sisältöjen oppiminen muodostui erittäin vaikeaksi. Erityispedagogiikan opiskelijana kiinnostusta herätti se, miksi matematiikan oppiminen on tuottanut minulle vaikeuksia. Lisäksi mielenkiintoni aihetta kohtaan kumpuaa siitä, että omissa erityispedagogiikan opinnoissani olen huomannut, kuinka paljon lukemisen ja kirjoittamisen oppimisvaikeuksista puhutaan mutta matemaattiset oppimisvaikeudet jäävät usein taka-alalle.

Räsänen ja Koposen (2015) mukaan matematiikan oppimisvaikeuksia on tutkittu vähemmän kuin lukemiseen liittyviä oppimisvaikeuksia: jokaista matemaattisia oppimisvaikeuksia käsittelevää tutkimusta kohden julkaistaan edelleen arvioltaan kaksi kirjoittamisen ja kaksikymmentä lukemisen vaikeuksia käsittelevää tutkimusta, vaikka on selkeästi osoitettu, että molemmat oppimisvaikeudet ovat yhtä yleisiä. Lisäksi matematiikan osaamisessa ilmenevät haasteet ovat suhteellisen pysyviä ja ilman riittävää tukea ne voivat vaikuttaa lapsen koko koulupolkuun (Salminen, 2016). Myös Räsänen (2012) toteaa, että jos matemaattisia oppimisvaikeuksia ei tunnisteta, eikä lapsi saa ongelmiin tukea, vaikeuksista tulee helposti elinikäinen haitta. Tällöin ammatillinen kouluttautuminen ja kyky selviytyä arjen matemaattisista vaatimuksista hankaloituu, mikä tekee matemaattisista oppimisvaikeuksista myös yhteiskunnallisen haitan. (Räsänen, 2012.) On siis selvää, että matemaattisten oppimisvaikeuksien tutkiminen ja niissä tukeminen on erittäin tärkeää.

Vaikka suurimmalle osalle lapsista ja nuorista matematiikan oppiminen ja matemaattisten taitojen soveltaminen käytännössä on suhteellisen helppoa, 15-20% lapsista ja nuorista kokevat enemmän haasteita matematiikan oppimisessa kuin ikätoverinsa. Erityisen haastavaa oppiminen on 5-7 prosentille lapsista ja nuorista. (Mononen, Aunio, Väisänen, Korhonen & Tapola,

2017.) Matematiikan oppiminen on luonteeltaan kumulatiivista eli matemaattisten taitojen kehitys etenee hierarkkisesti. Peruskäsitteet ja taidot luovat pohjan myöhemmälle oppimiselle, kun opetuksessa siirrytään monimutkaisempiin taitoihin ja tehtäviin. (Aunola & Nurmi, 2018, s. 55.) Matematiikassa taitoerot kasvavat selkeästi jo ennen koulun alkua (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004). Lapsilla, jotka kokevat haasteita varhaisissa matemaattisissa taidoissa, on todennäköisesti vaikeuksia myös myöhempien matemaattisten taitojen oppimisessa (Mononen ym., 2017). Matemaattisten oppimisvaikeuksien tunnistamisella varhaisessa vaiheessa ja tuen antamisella on siis merkittävä vaikutus siihen, kuinka isoiksi erot osaamisessa kasvavat.

## **2 Tutkielman lähtökohdat**

Tutkielmani tarkoituksena on lisätä tietoisuutta ja ymmärrystä matemaattisista oppimisvaikeuksista sekä siitä, mitä matematiikan oppiminen on ja kuinka mahdolliset oppimisen ongelmat voidaan tunnistaa ja millaista tukea niihin voidaan antaa. Monosen ja kollegoiden (2017) mukaan 20 oppilaan opetusryhmässä on keskimääräisesti neljä oppilasta, joille matematiikan oppiminen on haastavaa. Matemaattiset oppimisvaikeudet ovat myös kasvava syy osa-aikaiseen erityisopetukseen ja esimerkiksi 2006–2007 matematiikkaan annettavan erityisopetuksen määrä lisääntyi kuusi prosenttia (Aunio, 2008, s. 64). Näin ollen olisi tärkeää, että jokaisella opettajalla olisi riittävät tiedot matemaattisista oppimisvaikeuksista ja niiden tukemisesta. Kuitenkin Opetushallituksen teettämässä koulutuksen seurantaraportissa, jossa tutkittiin matematiikan oppimistuloksia peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen, todetaan, että yli 60% opettajista koki tarvitsevansa täydennyskoulutusta matemaattisista oppimisvaikeuksista. Lisäksi suurin osa opettajista koki, että omat valmiudet eivät ole riittävät (Räsänen, Närhi & Aunio, 2010.) On siis selvää, että tietoisuuden lisääminen matemaattisista oppimisvaikeuksista on tärkeää ja sitä tarvitaan.

### **2.1 Tutkielman kulku**

Tutkielmaa tehtäessä ensimmäisenä valitaan aihe. Tuomi ja Sarajärvi (2018) toteavat, että aihetta valittaessa on tärkeä miettiä esimerkiksi sitä, kuinka kiinnostava aihe on, kuinka hyvin se sopii omaan tieteenalaan, kuinka merkittävä aihe on yhteiskunnallisesti, miten aiheesta on saatavissa tietoa ja voiko tutkimuksen avulla lisätä tietoa tai ymmärrystä aiheesta. Metsämuurosen (2006) mukaan motivaation kannalta tutkimuksen aihe tulisi olla valittu omien mielenkiinnonkohteiden joukosta. Lisäksi hän peräänkuuluttaa aiheen rajaamista siten, että tutkimuskysymysten muodostaminen on mahdollista. (Metsämuuronen, 2006.) Aiheen hahmottuessa on hyvä tutustua siihen liittyvään kirjallisuuteen. Kirjallisuuden avulla on mahdollista hahmottaa mahdollisia tutkimuskysymyksiä tai -tehtäviä. Kun tutkimuskysymykset ovat valittu, valitaan sopiva tutkimusmenetelmä (Tuomi & Sarajärvi, 2018.)

Aion toteuttaa tutkielmani kirjallisuuskatsauksena eli lähdän tutkielmassani kartoittamaan ja analysoimaan jo olemassa olevia tutkimuksia ja kirjallisuutta omasta aiheestani. Salmisen (2011) mukaan kirjallisuuskatsaustyypit on jaoteltu kolmeen perustyyppiin: kuvaileva kirjallisuuskatsaus, systemaattinen kirjallisuuskatsaus ja meta-analyysi. Omaa tutkielmaani varten koen kuvailevan kirjallisuuskatsauksen sopivaksi vaihtoehdoksi.

Kuvaileva kirjallisuuskatsaus on yksi käytetyimmistä kirjallisuuskatsauksen tyypeistä ja se sopii tutkielmani tavoitteisiin hyvin. Kuvailevassa kirjallisuuskatsauksessa ei ole tiukkoja tai tarkkoja raameja, eikä aineiston valintaa rajaa metodiset säännöt. Tämän takia voin käyttää tutkimuksessani laajoja aineistoja, joilla pystyn kuvailemaan tutkimaani aihetta kokonaisvaltaisesti. Kuvailevaa kirjallisuuskatsausta käyttämällä saan muodostettua tutkimastani aiheesta selkeän ja laaja-alaisen kuvan sekä samalla voin luoda johtopäätöksiä aiheesta. (Salminen, 2011.)

Kiviniemen (2007) mukaan laadullisessa tutkimuksessa tutkimusprosessi etenee vähitellen sekä tutkimuksen aineiston keruu ja teorian kehittäminen toimivat vuorovaikutuksessa. Valitessani aineistoa tutkielmaani aion keskittyä siihen, mikä minua tutkittavassa aiheessa kiinnostaa ja mikä on merkittävää tutkielmani kannalta. Aionkin tutkielmaa tehdessäni pyrkiä tulkitsemaan aineistoani peilaamalla sitä tutkimuskysymyksiini. Nostan aineistostani esille sellaiset aiheet, jotka ovat merkittäviä ja tärkeitä tutkielmani kannalta sekä pyrkivät vastamaan asettamiini tutkimuskysymyksiin. Aineistoa valittaessa otan huomioon julkaisuajan, kirjoittajan mahdolliset kytkökset ja sen, onko julkaisua vertaisarvioitu. Lisäksi kiinnitän huomiota siihen, millä alustalla tutkimus tai artikkeli on julkaistu. Pyrin ottamaan tutkielmaani sellaisia lähteitä, jotka ovat vertaisarvioitu, julkaistu luotettavalla alustalla ja ne ovat mahdollisimman uusia.

Laadullista tutkimusta tehdessä täytyy myös pohtia sen eettisyyttä ja luotettavuutta. Luotettavuuskeskustelussa nousee esiin kysymys tutkimuksen objektiivisuudesta (Tuomi & Sarajärvi, 2018). Tutkimukseni luotettavuus voidaan tarkistaa käyttämistäni kirjallisuuslähteistä, jotka ilmoitetaan selkeästi tutkielmani lähdeluettelossa ja lähdeviitteinä leipätekstissä. Toisaalta tutkielmani luotettavuuteen voi vaikuttaa omat ennakko-olettamukseni aiheesta. Tutkimuksen toteuttajana minulla on vastuu valita tutkimukseeni luotettavat lähteet ja estää omien ennakko-oletusten vaikutus tutkielmaani.

Eskola ja Suoranta (1998) toteavat, että laadullisen tutkimuksen luotettavuuden pääasiallinen kriteeri on tutkija itse ja luotettavuuden arviointi koskee koko tutkimusprosessia. Tuomen ja Sarajärven (2018) mukaan puhuttaessa tutkimuksen eettisyydestä, tarkastellaan tällöin myös tutkimuksen laatua. Tutkijan tulee huolehtia esimerkiksi siitä, että tutkimussuunnitelma on laadukas ja tutkimusasetelma on sopiva. Lisäksi raportointi tulee olla hyvin tehty (Tuomi & Sarajärvi, 2018.) Tutkielmani rakenne koostuu johdannosta, tutkielman lähtökohdista sekä teoria-katsauksesta, jota seuraa kummankin tutkimuskysymyksen käsittely ja niiden vastaukset. Lopuksi päätän tutkielmani johtopäätöksiin ja pohdintaan.



## **2.2 Tutkimuskysymykset**

Tutkielman tavoitteena on selvittää: 1. Mitä matemaattiset oppimisvaikeudet ovat? 2. Miten lapsia, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, voidaan tukea? Tutkielmassani tulen siis tarkastelemaan matemaattisia oppimisvaikeuksia kokonaisvaltaisesti. Tavoitteena on kartoittaa, miten matemaattiset oppimisvaikeudet ilmenevät ja mistä ne johtuvat. Lisäksi tutkielmassa tuon esille erilaisia tuen antamisen keinoja kuten opetusmenetelmiä ja harjoitusohjelmia. Nostan myös esille sen, miten tukea tarvitsevat lapset voidaan tunnistaa mahdollisimman varhain.

### 3 Matematiikan oppiminen ja oppimisvaikeudet

Tutkielman teoreettisessa viitekehyksessä on tarkoituksena laatia katsaus, joka toimii tutkielman teoreettisena perustana. Teoreettinen viitekehys koostuu aikaisemmista tutkimuksista, joiden avulla muodostetaan kokonaiskatsaus tutkielmassa käytetyistä käsitteistä ja teorioista. Käsitteiden määrittely on tärkeää, sillä se mahdollistaa sen, että lukija ymmärtää, mitä tutkielmassa käsitellään. (Tuomi & Sarajärvi, 2018.)

Ensin lähden käsittelemään matematiikan oppimista keskittyen etenkin varhaisiin matemaattisiin taitoihin. Tämän rajauksen teen siksi, koska on tutkittu, että lapsille kehittyy varhaiset matemaattiset taidot jo ennen kouluikää sekä alkuopetuksen vuosina (Aunio, 2008, s. 63). Lapsilla ja nuorilla, joilla on haasteita matematiikan oppimisessa, ongelmat näkyvät usein juuri näissä keskeisissä taidoissa (Mononen ym., 2017, s. 11). Lisäksi tutkimukset ovat todistaneet, että varhaiset taidot ovat vahvasti yhteydessä myöhempään matematiikan oppimiseen (Aunola ym., 2004). Käsittelen myös oppimisvaikeudet yleisesti. Aihettani koskevissa tutkimuksissa käytetään hyvin vaihtelevia termejä kuvaamaan vaikeuksia matematiikassa. Tästä syystä määrittelen matemaattiset oppimisvaikeudet -käsitteen laajemmin myöhemmässä vaiheessa vastatessani ensimmäiseen tutkimuskysymykseen.

#### 3.1 Matematiikan oppiminen

Lapsen matematiikan taitojen kehitys alkaa jo ennen syntymää, sillä lapselle kehittyy keskushermosto, jonne numeerista tietoa käsittelevät alueet syntyvät (Mononen ym., 2017). Matematiikan oppiminen tapahtuu hierarkkisesti eli perustaidot luovat pohjaa myöhemmälle oppimiselle (Aunola & Nurmi, 2018, s. 55). Varhaiset matemaattiset taidot kehittyvät syntymästä lähtien noin kahdeksaan ikävuoteen asti (Mononen ym., 2017). Matematiikan perustaidot koostuvat siis useasta eri taidosta ja näiden taitojen kehittyessä ne muodostavat toisiinsa nojaavan kokonaisuuden (Koponen, Salminen & Sorvo, 2019, s. 324). Aunio ja Räsänen (2015) ovat kehittäneet mallin, joka sisältää neljä olennaista matemaattista taitokokonaisuutta. Malli koskee 5–8-vuotiaita lapsia. Nämä varhaiset matemaattiset taidot voidaan jakaa neljään eri osa-alueeseen: lukumääräisyydentaju, matemaattisten suhteiden ymmärtäminen, laskemisen taidot ja aritmeettiset perustaidot. (Aunio & Räsänen, 2015.)

*Lukumääräisyyden taju* on synnynnäinen taito ja sillä tarkoitetaan kykyä erottaa lukumääriä toisistaan (Mononen ym., 2017). Wynn (1992) on todennut, että jo vauvat pystyvät erottamaan

lukumääriä toisistaan sekä huomaamaan lisäämisen ja vähentämisen vaikutukset pienillä määrittä. Lipton ja Spelke (2003) havaitsivat tutkiessaan vastasyntyneitä, että kuusikuukautiset vauvat pystyvät erottamaan määrät kahdeksan ja 16 toisistaan, kun taas yhdeksänkuukautiset vauvat pystyvät jo erottamaan toisistaan määrät kahdeksan ja 12. Aunio ja Räsänen (2015) mukaan taito erottaa lukumääriä toisistaan on ei-kielellinen taito eli lukumäärien hahmottaminen tapahtuu ilman kieleen perustuvaa laskemista. He toteavat myös, että lukumääräisyydentaju on perustavanlaatuinen matemaattinen kyky, joka luo pohjaa myöhemmälle formaaliselle matematiikan oppimiselle peruskoulussa. (Aunio & Räsänen, 2015.) On myös esitetty, että lukumääräisyyden taju olisi ydinkyky matemaattisen ajattelun ja matemaattisten taitojen kehityksen taustalla ja sitä voitaisiin verrata luku- ja kirjoitustaidon taustalla olevaan fonologiseen prosessointikykyyn (Koponen ym., 2019).

*Matemaattisten suhteiden ymmärtämisellä* tarkoitetaan taitoa ymmärtää määrällisiä ja ei-määrällisiä suhteita. Tähän taitokokonaisuuteen kuuluu matemaattis-loogiset taidot, aritmeettiset periaatteet, matemaattisten symbolien ymmärtäminen sekä kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon hallitseminen. Matemaattis-loogisilla taidoilla tarkoitetaan taitoja sarjoitella, luokitella, vertailla ja yksi-yhteen periaatteen ymmärtämistä. (Aunio & Räsänen, 2015.) Monosen ja kollegoiden (2017) mukaan aritmeettiset periaatteet ovat puolestaan ne loogiset periaatteet, joita tarvitaan peruslaskutoimituksissa, kuten yhteen- ja vähennyslaskuissa. Tällaisia ovat esimerkiksi ymmärrys vaihdannaisuudesta, liitännäisyydestä, käänteisyydestä ja siitä, että kokonaisuudet muodostuvat pienemmistä osista (Aunio & Räsänen, 2015).

Oppiakseen matematiikkaa lasten täytyy myös ymmärtää matemaattisia symboleja kuten eri laskuoperaatioiden symboleja (yhteen-, vähennys-, jako- ja kertolaskujen merkit) ja vertailusymboleja: yhtä kuin ( $=$ ), enemmän kuin ( $>$ ), pienempi kuin ( $<$ ) ja eri suuri kuin ( $\neq$ ) (Aunio & Räsänen, 2015). Kymmenjärjestelmällä tarkoitetaan lukujärjestelmää, jonka kantaluku on kymmenen ja paikka-arvo merkitsee sitä, että numero 0-9 saa tietyn arvon riippuen siitä, millä paikalla se luvussa on (Mononen ym., 2017). Kymmenjärjestelmän hallitseminen on oleellinen taito, jotta lapsi kykenee ymmärtämään, että numerosymboleilla on eri arvo riippuen siitä, missä kohtaa numerosarjaa ne ovat (Aunio & Räsänen, 2015). Esimerkiksi luvussa 135 numerosymboli 1 tarkoittaa lukua sata, numerosymboli 3 tarkoittaa lukua kolmekymmentä ja numerosymboli 5 tarkoittaa lukua viisi.

*Laskemisen taitoihin* kuuluu kolme tärkeää osa-aluetta: numerot (lukusanat ja symbolit), lukujonotaidot ja lukumäärien laskeminen. Lukusanojen oppiminen on ensimmäinen askel kohti

verbaalisia matemaattisia taitoja. (Aunio & Räsänen, 2015.) Lapset aloittavat lukusanojen käyttämisen luettelemalla ääneen lukuja mutta tällöin niiden käyttö ei ole vielä tarkoituksenmukaista (Aunio & Niemivirta, 2010, s. 428). Lapsi lopulta oppii, että lukusana viittaa numerosymboliin ja tiettyyn lukumäärään. Näiden kolmen tekijän yhteyden oppiminen onkin keskeinen oppimistavoite koulun alkaessa. (Mononen ym., 2017.)

Aunion ja Räsäsen (2015) mukaan lukujonotaidoilla tarkoitetaan taitoa luetella lukuja eteen- ja taaksepäin, luetella lukuja esimerkiksi kahden tai viiden välein sekä luetella lukuja eteen- ja taaksepäin annetusta luvusta. Lukujonotaidot ovat tärkeitä, sillä ilman kykyä luetella oikein lukusanoja, on lukumäärien laskeminen käytännössä mahdotonta. Lukujonotaidot mahdollistavat sen, että lapsi kykenee laskemaan esineiden tai asioiden lukumäärän (Aunio & Niemivirta, 2010, s. 428). Lukujonotaidot alkavat kehittymään 2–3 vuoden iässä ja esiopetusikäisenä lapsi on yleensä kykeneväinen luettelemaan lukuun 20 asti (Koponen ym., 2019). Varhaiset lukujonotaidot ovat vahva matemaattisten taitojen kehitystä ennustava tekijä (Aunola & Nurmi, 2018, s. 58).

Jotta lukumäärän laskeminen onnistuu, täytyy lapsen siis osata luetella lukuja oikeassa järjestyksessä ja lisäksi lapsen täytyy hallita yksi yhteen- suhde: lapsi yhdistää lukusanat laskettaviin esineisiin sekä kohdistaa lukusanan ja osoittavan eleen esineeseen. Lapsen on kyettävä myös ymmärtämään kardinaalisuus eli se, että viimeiseksi sanottu lukumäärä on laskettavien esineiden määrä. (Aunio & Räsänen, 2015; Butterworth, 2005.) Laskemaan oppiminen kestää noin neljä vuotta alkaen toisesta ikävuodesta (Butterworth, 2005). Koposen ja kollegoiden (2019) mukaan kun lapsen laskusujuvuus kehittyy, hän siirtyy ääneen luettelemisesta mielessä tapahtuvaan luettelemalla laskemiseen. Lapset eroavat laskustrategioissaan siinä, miten he laskevat luettelemalla. Tehokkain strategia on laskeminen siten, että lukujen luetteleminen on mahdollisimman vähäistä. Tällöin lapsi aloittaa laskemisen suuremmasta luvusta. Esimerkiksi laskussa  $2+5$  laskeminen kannattaa aloittaa luvusta 5. Lapsen lukukäsitteen vahvistuessa myös laskeminen ilman luettelemista alkaa kehittymään. (Koponen ym., 2019.)

5- vuotiaalla lapsella on jo taito laskea pieniä lukumääriä ja ymmärtää niiden keskinäisiä suhteita. Tämän takia lapsi on kykeneväinen yhdistelemään esineiden kokonaisuuksia toisiinsa ja laskemaan niiden lukumäärän. Tällaiset toiminnot vaativat *aritmeettisia perustaitoja*, joita ovat yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskutaidot. (Mononen ym., 2017.) Aunio (2008) mukaan yhteen- ja vähennyslaskujen ratkaisemisen harjoittelu aloitetaan jo esikouluiässä ja ratkaisutaidot kehittyvä huomattavasti esi- ja alkuopetusvuosina. Aritmeettiset perustaitojen kehittyessä

lapsi siirtyy pienistä luvuista aina suurempiin lukualueisiin. Aunio toteaa myös, että lopulta lapsen ei enää tarvitse laskea yksinkertaisia yhdistelmiä, vaan vastaus löytyy suoraan muistista. Tätä kutsutaan aritmeettisten yhdistelmien muistamiseksi. (Aunio, 2008.)

Ennen kouluikää keskiössä ovat laskemisen taidot, lukumääräisyydentaju, aritmeettisten perustaitojen harjoittelu ja matemaattis-loogiset periaatteet, jotka kuuluvat matemaattisten suhteiden ymmärtämiseen (Aunio, 2008). Lisäksi Aunio, Hannula ja Räsänen (2004) nostavat varhaislapsuudessa oleellisiksi tekijöiksi huomion kiinnittämisen lukumääriin ja ymmärryksen kardinaalisuudesta, ordinaalisuudesta (järjestysperiaate), yksi yhteen vastaavuudesta ja osa-kokonaisuhteista. Varhaiskasvatussuunnitelman (2018) ja esiopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014) matematiikan osalta tavoitteena on ohjata lapsia havainnoimaan lukumääriä ympäristöstä ja liittämään ne lukusanaan ja numerosymboleihin. Lukukäsitteen kehittymistä tuetaan ja lapsille luodaan mahdollisuuksia vertailla, luokitella ja asettaa esineitä järjestykseen ja löytää niistä säännönmukaisuuksia. Päivittäisissä tilanteissa lapsia ohjataan huomaamaan ympäristössä ilmeneviä muotoja, määriä ja muutoksia. (Opetushallitus, 2018; Opetushallitus, 2014a.) Esiopetuksessa huomiota kiinnitetään erityisesti lasten lukujonotaitojen ja nimeämisen kehittämiseen (Opetushallitus, 2014a).

Tutkittaessa päiväkotikäisten lasten varhaisia matemaattisia taitoja Aunio, Heiskari, Van Luit ja Vuorio (2014) havaitsivat, että jo päiväkodissa lapsilla esiintyy eroja matemaattisissa taidoissa. Erot ilmenivät etenkin kahdessa matematiikan taidossa: matemaattisten suhteiden ymmärtämisessä ja laskemisen taidoissa. Erot osaamisessa näyttivät pysyvän samana vuoden aikana. (Aunio ym., 2014.) Myös Aunola ja kollegat (2004) havaitsivat tutkimuksessaan samankaltaisia tuloksia. Matemaattisten taitojen karttuminen näytti alkavan jo ennen formaalia opetusta ja tulokset osoittivat, että yksilölliset erot matemaattisessa suoriutumisessa kasvoivat lasten siirtyessä esikoulusta perusopetukseen. Erot osaamisessa säilyvät esikoulun alusta toisen vuosiluokan loppuun asti. Erot myös kasvoivat suuremmiksi ajan myötä ja matemaattisesti hyvin suoriutuvat lapset osoittivat suurempaa osaamisen kasvua verrattuna matemaattisesti heikommin suoriutuviin lapsiin. (Aunola ym., 2004.)

Alakoulussa lapsille keskeisimmät matemaattiset taidot ovat aritmeettiset perustaidot ja etenkin yhteen- ja kertolaskujen oppiminen korostuu. Laskemisen taidot ja lukumääräisyyden taju säilyvät edelleen merkittävinä osina keskeisten taitojen hallinnassa. Koulun alkaessa lapset oppivat lisää yhteen- ja vähennyslaskutaitoja ja he kehittyvät melko taitaviksi pienillä luvuilla las-

kemisessa. Lasten laskemisen taidot automatisoituvat ja heidän matemaattiset suhdetaitoinsa kehittyvät lisää. Myös ymmärrys esimerkiksi yhteen- ja vähennyslaskujen käänteisyydestä ja yhteenlaskun tekijöiden vaihdannaisuudesta kehittyy. (Mononen ym., 2017.)

Ikävuosina 8-12 lapset oppivat laskemaan aritmeettisia tehtäviä sekä symboleilla että sanallisina tehtävinä. Myös lukujonotaidot kehittyvät, mikä auttaa lapsia sisäistämään kymmenjärjestelmän ja paikka-arvon merkityksen. (Mononen ym., 2017.) Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014b) mukaan alkuopetuksessa matematiikan opetuksen tavoitteena on kehittää oppilaiden matemaattista ajattelua. Opetuksessa tarjotaan monipuolisia kokemuksia, jotka luovat perustan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden muodostumiselle. Tarkoituksena on luoda vahva pohja lukukäsitteen ja kymmenjärjestelmän ymmärtämiselle sekä laskutaidolle. (Opetushallitus, 2014b.)

Mononen, Aunio, Hotulainen ja Ketonen (2013) tutkivat ensimmäisen luokan aloittavien lasten matematiikan osaamista eri osa-alueilla. Tutkimuksen keskeinen tulos oli se, että ensimmäisen luokan aloittavilla oppilailla on hyvät matemaattiset taidot jo koulun alkaessa. Ne matematiikan taidot, joita opetetaan ensimmäisen luokan syksyllä, oli jo monella lapsella hallinnassa. Huomioitavaa on kuitenkin se, että osaamisessa oli huomattavaa vaihtelua ja ensiluokkalaisten joukossa oli oppilaita, joiden taidot olivat selkeästi heikompia. (Mononen ym., 2013.) Aunola ja Nurmi (2018) toteavatkin, että alkuopetus näyttäisi hyödyttävän eniten niitä oppilaita, joilla matemaattiset taidot ovat edistyneimpiä, kun taas taidoiltaan heikommat oppilaat jäävät jälkeen.

### **3.2 Oppimisvaikeudet**

Oppimisvaikeuksia on määritelty tutkimuskirjallisuudessa monin tavoin. Nylundin (2011) mukaan oppimisvaikeudella tarkoitetaan sitä, että oppilaan suorittaminen jollain tietyllä alueella on poikkeuksellisen heikkoa suhteessa hänen muuhun suoriutumistasoonsa. Mikkonen, Nikander ja Voutilainen (2015) puolestaan määrittelevät oppimisvaikeuden vaikeutena oppia opetettavia taitoja. Molempien määritelmien mukaan vaikeudet oppimisessa eivät selity kokonaiskehityksen viiveellä, aistivammoilla, riittämättömällä opetuksella, tunne-elämän ongelmilla tai käytöshäiriöllä (Mikkonen ym., 2015; Nylund, 2011).

Oppimisvaikeudet johtuvat keskushermoston kehityksen poikkeavuuksista, jotka vaikuttavat keskushermoston toimintaan (Aro, Aro, Koponen & Viholainen, 2012, s. 300). Oppimisvaikeuksien taustalla on siis aivojen rakenteellinen tai toiminnallinen erityispiirre ja poikkeuksellinen tapa käsitellä informaatiota. Tällainen taipumus on hyvin yleisesti pysyvä ja perinnöllinen. (Nylund, 2011.) Mikkonen ja kollegat (2015) toteavat, että oppimisvaikeuden taustalla voi olla primääriset tai sekundaariset syyt. Primaariset syyt oppimisvaikeuden taustalla liittyvät yleensä perintötekijöihin. Esimerkiksi vanhemman lukivaikeus voi periytyä lapselle. Sekundaariset syyt ovat puolestaan kehityksellisiä eli oppimisvaikeus voi olla jonkin varhaisen tapahtuman seuraus. Esimerkiksi keskossuus ja sikiön alkoholialtistus voivat olla selittäviä tekijöitä. (Mikkonen ym., 2015.)

Aro ja kollegat (2012) toteavat, että oppimisvaikeuksien yleisyydestä on haasteellista esittää täsmällisiä lukuja. Oppimisvaikeuksien yleisyys suomalaisessa väestössä vaihtelee eri tutkimuksissa mutta arvioltaan niitä todetaan 5-20% suomalaisista (Mikkonen ym., 2015). Oppimisvaikeuksilla voidaan suppeimmillaan tarkoittaa häiriöitä, jotka aiheuttavat vaikeuksia oppia koulussa opeteltavien taitoalueiden sisältöjä kuten kirjoittamista, lukemista ja matematiikkaa. Jos käsitettä laajennetaan, sisältyy siihen myös motoriikkaan, visuaalisen tiedon käsittelyyn, muistiin ja sosiaalisten taitojen oppimiseen liittyvät kehitykselliset ongelmat. Ajoittain myös itsesäätelyyn, toiminnanohjaukseen ja tarkkaavuuteen liittyvät haasteet sisällytetään oppimisvaikeus käsitteeseen. (Aro ym., 2012.) Laaja-alaisista oppimisvaikeuksista puhutaan, kun yleinen suoritustaso on keskitasoa heikompaa mutta on korkeampi kuin lievästi kehitysvammaiseksi luokitelluilla (Nylund, 2011). Tällöin ongelmat ilmenevät moninaisten taitojen hallinnan ja oppimisen heikkouksina (Aro ym., 2012). Seuraavaksi lähden kartoittamaan erityisiä ja laaja-alaisia oppimisvaikeuksia tarkemmin.

### *3.2.1. Laaja-alaiset oppimisvaikeudet*

Vaikka tutkimuskirjallisuudesta löytyy erilaisia kriteerejä laaja-alaisen oppimisvaikeuksien käsitteelle, ei sille ole olemassa yleisesti hyväksyttyä määritelmää. Käsitettä määriteltäessä esille nousee alhainen älykkyysosamäärä ja rajanveto lievän kehitysvammaisuuden suuntaan. Lisäksi rajanvetoa on tehty myös erityisten oppimisvaikeuksien suuntaan. Laaja-alaisia oppimisvaikeuksia voidaan määritellä itsenäisesti koulussa suoriutumisen vaikeuksina ja myös erityisten oppimisvaikeuksien kasaantumisen näkökulmasta. (Kuikka, Närhi & Seppälä, 2014.)

Lääketieteessä laaja-alaiset oppimisvaikeudet sijoittuvat monimuotoisten kehityshäiriöiden diagnoosin alle. Laaja-alaisissa oppimisvaikeuksissa ei täyty vaadittavat kehitysvammaisuuden diagnostiset kriteerit, vaikkakin raja näiden kahden välillä ei ole selkeä. (Alen & Kultti-Lavikainen, 2018a.) Kuikan, Närhen ja Seppälän (2014) mukaan laaja-alaiset oppimisvaikeudet näkyvät useimmiten jo perusopetuksen alkaessa isoina ja pysyvinä haasteina oppia koulussa opettavia asioita. Laaja-alaiset ongelmat johtuvat pääasiallisesti heikkouksista kognitiivisessa tiedonkäsittelyssä poissulkien ne vaikeudet, jotka johtuvat mielenterveyden ongelmista tai sosiaalis-emotionaalisista syistä. Lisäksi laaja-alaisissa oppimisvaikeuksissa oppimisen haasteita ei voida selittää suurilla erityisvaikeuksilla kuten vakavalla autismikirjonhäiriöllä tai laajalla kielen kehityksen erityisvaikeudella. (Kuikka, Närhi & Seppälä, 2014.)

Laaja-alaiset oppimisvaikeudet ei ole homogeeninen ongelmaryhmä, vaan vaikeudet oppimisessa johtuvat eri yksilöillä eri syistä. Oppimiseen vaikuttavat erilaisten ongelmien ja kognitiivisten heikkouksien kasautuminen. Jotkut oppivat tietoja ja taitoja suhteellisen normaalisti mutta joihinkin oppimisen kognitiivisiin edellytyksiin kasautuu suuria heikkouksia. Joillakin puolestaan kognitiivisissa edellytyksissä ei esiinny poikkeuksellisia heikkouksia, mutta oppimisessa ilmenee kuitenkin laaja-alaisia ongelmia. (Kuikka, 2014.)

### 3.2.2 Erityiset oppimisvaikeudet

Oppimisvaikeuksiin liitetään usein lisämääre *erityinen*, jolloin kyseessä on kapea-alainen häiriö, joka tuottaa haasteita vain jonkin rajatun taidon oppimiselle ja käytölle (Aro ym., 2012, s. 299). Erityisissä oppimisvaikeuksissa on kyseessä koulussa opettavien taitojen, kuten lukemisen, kirjoittamisen tai laskemisen, merkittävästi heikompi hallinta verrattuna yksilön yleiseen taitotasoon (Alen & Kultti-Lavikainen, 2018b). Oppimisen erityisvaikeus voi siis ilmetä merkittävinä vaikeuksina lukemisessa, kirjoittamisessa ja laskemisessa mutta vaikeuksia voi myös esiintyä kielellisessä kehityksessä tai liiketoiminnoissa (Nylund, 2011).

Aron ja Lerkkasen (2019) mukaan lukemisen vaikeudella tarkoitetaan vaikeuksia oppia tarkkaa ja sujuvaa lukutaitoa. Se on erityisvaikeus, jonka taustalla ilmenee kielellisiä, erityisesti kielen äänteellisen tason sujuvaan hallintaan liittyviä vaikeuksia, jotka näkyvät vaikeutena oppia kirjoitetun ja puhutun kielen vastaavuuksia. Ydinongelma lukemisen vaikeudessa on teknisen lukutaidon oppiminen eli kyky tunnistaa sujuvasti kirjoitetun sanan ääntöasu ja sen merkitys.



(Aro & Lerkkanen, 2019.) Kirjoittamisen vaikeudella eli dysgrafialla tarkoitetaan erityistä kognitiivista häiriötä, jossa ongelmana on kirjoitustaidon oppiminen. Ongelmat ilmenevät oikeinkirjoituksessa tarvittavien äänne-kirjainvastaavuuksien ja sanojen kirjoitetun muodon muistamisessa sekä myös kirjainmuotojen oikeanlaisessa kirjoittamisessa. Ongelmat ovat siis äänne-kirjainvastaavuuden käyttämisessä. (Lerkkanen, Ahonen, Ketonen & Leppänen, 2019.)

Lukivaikeus eli dysleksia näyttäytyy sekä lukemisen että kirjoittamisen ongelmina. Lukivaikeus mahdollisesti vaikeuttaa kaikkea kirjoitetun kielen hallintaan liittyviä asioita. Ydinongelmana pidetään sanatason lukemisen ja sanantunnistuksen ongelmia, joiden taustasyynä on erityisesti kielen äänteellisen tason prosessoinnin vaikeus. Lukivaikeuteen voi myös mahdollisesti liittyä luetun ymmärtämisen vaikeuksia, mutta niiden ajatellaan olevan sekundaarisia seurauksia lukivaikeudesta. (Aro ym., 2012.)

Matematiikan oppimisvaikeudet on vaikea määritellä tarkka-rajaisesti ja yhtenäistä oppimisvaikeus määritelmää ei ole pystytty tekemään. Perusajatuksena on, että matematiikan oppimisvaikeudet koskevat matematiikan perustaitoja. (Aro ym., 2012.) Räsänen (2012) mukaan matematiikan oppimisvaikeudella tarkoitetaan vaikeuksia oppia ja hallita peruslaskutaitoja. Vaikeuteen voi myös liittyä haasteet ymmärtää lukujärjestelmää (Koponen ym., 2019). Määrittelen matematiikan oppimista koskevia vaikeuksia tarkemmin luvussa neljä.

## 4 Matemaattiset oppimisvaikeudet

Vaikeuksista matematiikan oppimisessa käytetään tutkimuskirjallisuudessa vaihtelevasti eri käsitteitä: kehityksellinen dyskalkulia (Shalev, 2007), aritmeettiset oppimisvaikeudet (Micallef & Prior, 2004), matematiikan oppimisvaikeudet (Koponen ym., 2019) ja matemaattiset oppimisvaikeudet (Mononen ym., 2017). Mazzocco (2007) toteaa, että matematiikan oppimisvaikeuksien määrittäminen on vaikeaa, ja hän onkin pyrkinyt selkeyttämään matematiikan oppimisvaikeuksia käsittelevien tutkimuksien eri terminologiaa. Termejä *mathematical learning disabilities*, *mathematical learning difficulties*, *mathematical disability* ja *dyscalculia* on yleisesti käytetty alan tutkimuskirjallisuudessa. Sana *disability* viittaa oppimisvaikeuden biologiseen perustaan eli vaikeudet johtuvat tietyistä kognitiivisista vajaavaisuuksista. *Mathematical learning difficulties* viittaa puolestaan heikkoon matemaattiseen osaamiseen, jossa vaikeudet oppimisessa johtuvat monista eri syistä. Kaikilla lapsilla, joilla esiintyy haasteita matematiikassa, ei ole matematiikan oppimisvaikeutta. (Mazzocco, 2007.)

Myös suomalaisessa tutkimuskirjallisuudessa on vaikeuksia matematiikan oppimisessa määriteltä eri tavoin. Räsänen ja Ahosen (2004) mukaan matematiikan oppimisen vaikeudet eivät selity sosiaalisilla tai motivaatiotekijöillä, vaan taustasyynä näyttäisi olevan rakenteellinen ja/tai toiminnallinen poikkeama aivoissa. Heikon oppimisen ja aivotoiminnallispohjaisten oppimisvaikeuksien erottaminen ei ole kuitenkaan ongelmatonta, vaan vaikeudet ilmenevät koulussa usein monitaustaisina ja mitä myöhemmin lapsen oppimisen haasteiden selvittämiseen tartutaan, sitä pulmallisempaa on erottaa johtuvatko ongelmat harjoittelu-, motivaatio-, tai kognitiivisista tekijöistä. (Räsänen & Ahonen, 2004.)

Koponen ja kollegat (2019) käyttävät termiä matematiikan oppimisvaikeudet ja toteavat, että sillä tarkoitetaan ongelmia, joiden vaikeusaste ja taustasyyt ovat monimuotoisia. Matematiikan oppimisvaikeudet ovat siis kirjo monenlaisia ja eritasoisia taitojen ja taitopuutteiden kokonaisuuksia. Tästä syystä he puhuvat monikossa matematiikan oppimisvaikeuksista. Mononen ja kollegat (2017) puolestaan käyttävät termiä matemaattiset oppimisvaikeudet. He toteavat, että matemaattiset oppimisvaikeudet ovat kohtalaisen kapea-alaisia ja ne voivat olla vaikeusasteeltaan lieviä, kohtalaisia tai vaikeita. Matemaattiset oppimisvaikeudet käsitteenä painottaa sitä, että ongelmat näkyvät muissakin oppiaineissa kuin matematiikassa. Oppilaalla voi olla ongelmia esimerkiksi luonnontieteissä tai historiassa. Monikkomuodolla puolestaan korostetaan sitä, että ei ole olemassa vain yhtä vaikeustyyppiä, vaan vaikeudet näkyvät eri tavoin eri matemaat-

tisissa taidoissa. (Mononen ym., 2017.) Oppimisvaikeuksien heterogeenisyys näkyy myös niiden taustasyissä. Vaikeuksien taustalta ei löydy vain yhtä tiettyä biologista tai kognitiivista selittävää tekijää. Yleinen mielipide kuitenkin on, että matemaattisissa oppimisvaikeuksissa on kyse aivojen toiminnallisista poikkeavuuksista, mikä näkyy heikkoutena lukumäärien ja lukuihin liittyvän tiedon prosessoinnissa. (Koponen ym., 2019.)

Mononen ja kollegat (2017) pitävät matemaattisia oppimisvaikeuksia kattoterminä, joka sisältää käsitteet dyskalkulia (verrattavissa termiin *mathematical learning disabilities*) ja heikko osaaminen matemaattisissa taidoissa. Tutkimuskirjallisuudessa on usein pyritty tekemään ero lasten ja nuorten välille, joilla on dyskalkulia ja joilla taidot matematiikassa ovat heikot. Koulukontekstissa on kuitenkin keskeisempää löytää ne oppilaat, joilla on oppimisen vaikeuksia matematiikassa riippumatta siitä, onko heillä dyskalkulia tai vain heikko osaaminen matemaattisissa taidoissa. (Mononen ym., 2017.)

Kun matemaattista osaamista mitataan, käytetään tutkimuksessa vakiintuneita raja-arvoja. Tutkijoiden määrittelemät raja-arvot ovat tietyssä mielessä keinotekoisia, mutta tutkimusten kautta on heikolle osaamille yleistymässä yhteisesti hyväksytty raja-arvo. (Mononen ym., 2017.) Lapsen, joiden mitattu matemaattinen osaaminen on 11. ja 25. persentiilin välillä vähintään kahtena peräkkäisenä vuotena, ovat matemaattisilta taidoiltaan heikkoja. Jos mitattu matemaattinen osaaminen jää alle 10. persentiilin vähintään kahtena peräkkäisenä vuotena, puhutaan tällöin dyskalkuliasta. (Geary, 2011; Geary, Hoard, Nugent & Bailey, 2012.)

Dyskalkulia eli laskemiskyvyn häiriö (F81.2) näkyy vaikeuksina oppia ja hallita peruslaskutaitoja kuten yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja. Vaikeuksia ei selitä älykkyystaso, näköaistin ongelmat, neurologinen sairaus tai puutteellinen opetus. (Lindholm, Loukusa & Paavola-Ruotsalainen, 2016, s. 211.) Dyskalkuliaa esiintyy 5-7% ihmisistä (Geary 2011; Lindholm ym., 2016). Heikkoa osaamista matemaattisissa taidoissa esiintyy 10-15 prosentilla lapsista ja nuorista. Haasteet matemaattisissa taidoissa eivät ole yhtä vakavat kuin dyskalkuliassa mutta ne vaikeuttavat matematiikan oppimista ja selviytymistä niistä arkielämän asioista, joissa matemaattisia taitoja tarvitaan. Heikot matemaattiset taidot voivat selittyä kognitiivisilla, motivaationaalisilla tai oppimisympäristöön liittyvillä tekijöillä. (Mononen ym., 2017.)

#### 4.1 Ongelmat matematiikan oppimisessa

Vaikka tutkimuksissa käytetään hyvin kirjavasti erilaisia termejä kuvaamaan vaikeuksia matematiikan oppimisessa, vaikeuksien olennaisimmista piirteistä ollaan kohtalaisen yksimielisiä (Koponen ym., 2019). Tutkimuksissa on havaittu, että lapsilla, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, ilmenee vajavaisuuksia kyvyssä muodostaa representaatioita lukumääristä ja tallettaa aritmeettisia faktoja muistiin sekä hakea niitä muistista. Lisäksi heillä ilmenee kehitysviivettä aritmeettisten laskutoimitusten oppimisessa. (Geary, 2011.)

Yksi yleisimmistä ongelmista matematiikan oppimisessa on vaikeus muistaa aritmeettisia faktoja. Tällaisia ovat esimerkiksi pienten yhteen ja vähennyslaskujen vastaukset tai kertotaulu. (Koponen ym., 2019.) Aritmeettisten faktojen sujuva muistista hakeminen tuottaa haasteita lapsille, joilla on dyskalkulia mutta myös osalle lapsista, joilla matemaattiset taidot ovat heikot. Nämä haasteet ovat usein pysyviä. Ongelmat aritmeettisten faktojen hakemisessa muistista voivat näkyä väärinä vastauksina laskuissa tai hitaana laskustrategiana. (Mononen ym., 2017.) On yleistä, että lapsi joutuu käyttämään sellaisia strategioita, joissa joutuu luettelemaan paljon. Vaihdannaisuuden periaatetta ei osata hyödyntää laskemisessa, vaan laskeminen tapahtuu siinä järjestyksessä kuin ne on esitetty. Esimerkiksi laskussa  $3+8$  lapsi aloittaa laskemisen luvusta 3 ja lisää siihen kahdeksan yksitellen luettelemalla, vaikka laskeminen olisi helpompaa, jos pohjaluvuksi otetaan luku 8. (Koponen ym., 2019.)

On havaittu, että lapset, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, omistavat yleensä heikomman lukumääräisyyden tajun verrattuna ikätovereihinsa (Desoete, Ceulemans, De Weerd & Pieters, 2012, s. 75). Monosen ja kollegoiden (2017) mukaan tämä heikkous näkyy etenkin niillä lapsilla ja nuorilla, joilla on dyskalkulia. Vaikeudet ilmenevät sekä lukumäärien ja lukujen suuruuden arvioinnissa että pienempien lukumäärien nopeassa tunnistamisessa. Lapsi ei tällöin kykene nopeasti tunnistamaan esimerkiksi nopan pistelukua viisi, vaan hän joutuu laskemaan pisteet yksitellen. Heikkous lukumääräisyyden tajussa voi ilmetä myös siten, että lapsen arvio lukumäärästä eroaa huomattavasti oikeasta lukumäärästä. (Mononen ym., 2017.)

Koponen ja kollegat (2019) toteavat, että jos matematiikan oppimisen ongelmien takana on heikko ymmärrys lukujen suuruusluokista ja määristä, vaikeudet voivat ilmetä vasta silloin, kun vaaditaan lukujärjestelmätiedon soveltamista. Vaikeuksia saattaa tuottaa esimerkiksi lukujen rakenteen ymmärtäminen. Tällöin lukujen suuruuden vertailu ja laskeminen isoilla luvuilla tuottaa vaikeuksia, sillä lapsi ei ymmärrä, että luvussa 201 on ”kaksi sataa” ja luvussa 199 on ”yksi sata”. Usein lapsella voi olla myös vaikeuksia hyödyntää laskemisessa suuruusluokkaa

koskevaa tietoutta. Luku 199 on yhtä vaille 200, siten laskun  $199+56$  voidaan laskea  $200+56-1$  tai  $200+55$ . Joillekin kymmenjärjestelmän ymmärtäminen tuottaa vaikeuksia, ja jos lukuyksiköiden väliset suhteet eivät ole selkeät, ei kymmenillä, sadoilla ja tuhansilla kertominen ja jakaminen onnistu. (Koponen ym., 2019.)

Gearyn (2011) mukaan lapsilla, joilla on dyskalkulia tai heikot matemaattiset taidot, käyttävät samankaltaisia ongelmanratkaisukeinoja kuin tavallisesti menestyvät lapset mutta heidän proseduraaliset taitonsa eli taidot suorittaa laskutoimituksia eivät ole yhtä kehittyneitä kuin ikätovereillaan. Taidot näyttäisivät kehittyvän ajan myötä mutta se tapahtuu yleensä monien vuosien viiveellä (Mononen ym., 2017). On myös havaittu, että lapsilla, joilla matemaattiset taidot ovat heikot, numeerisen informaation prosessointi ei ole yhtä sujuvaa kuin lapsilla, joilla on tavalliset matemaattiset taidot. Lisäksi heikosti suoriutuvat lapset näyttävät tietävän vähemmän yhteenlaskuihin liittyviä aritmeettisiä faktoja verrattuna normaalisti suoriutuviin. (Geary, Hoard, Byrd-Caven, Nugent & Numtee, 2007.)

Geary ja kollegat (2007) ovat kuitenkin todenneet, että heikosti suoriutuvilla lapsilla on lähes ikätovereita vastaavat matemaattiset taidot tietyillä alueilla. Vajavaisuuksia ja heikkouksia löytyy kuitenkin numeerisen tiedon prosessoinnin sujuvuudessa ja lukujonotaidoissa. Lisäksi yhteenlaskuihin liittyvien aritmeettisten faktojen hakeminen muistista on hidasta verrattuna ikätovereihin. Lapsilla, joilla on dyskalkulia, näyttäisi olevan heikkouksia useammalla matemaattisella osa-alueella verrattuna heikosti ja normaalisti suoriutuviin lapsiin. (Geary ym., 2007.)

## **4.2 Kognitiiviset taustatekijät**

Eri tutkimusten avulla on pystytty osoittamaan, että heikot matemaattiset taidot voivat osaltaan selittyä kognitiivisten taitojen heikkoutena (Mononen ym., 2017). Gearyn ja kollegoiden (2012) mukaan kognitiivisiin kykyihin luetaan älykkyys, työmuisti ja informaation prosessoinnin nopeus. Nämä kyvyt vaikuttavat oppimiseen monella alueella mukaan lukien matematiikan oppimisen. Matematiikan oppimisen vaikeuksien taustalta on havaittavissa useita erilaisia kognitiivisia tekijöitä kuten työmuistin kapeutta, numeerisen tiedon prosessoinnin hitautta ja visuospatialisen työmuistin heikkoutta (Geary ym., 2007; Kyttälä, 2008).

Kyttälän ja Kanervan (2018) mukaan erilaisten matemaattisten tehtävien tekeminen asettaa kuormitusta tiedonkäsittelyjärjestelmälle. Yksi osa tiedonkäsittelyjärjestelmää on työmuisti, jossa ylläpidetään tehtävän keskeisimpiä tietoja ja myös suoritetaan itse tehtävä. Siihen, miten

hyvin ihminen suoriutuu matemaattisesta tehtävästä, vaikuttaa hänen työmuistivalmiutensa. (Kyttälä & Kanerva, 2018.) Murphy, Mazzocco, Hanich ja Early (2007) havaitsivat tutkimuksessaan, että lapset, joilla ei ole matemaattisia oppimisvaikeuksia, suoriutuvat paremmin työmuistia mittaavissa tehtävissä kuin lapset, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia. Kyttälä (2008) kuitenkin toteaa, että matemaattisesti heikkojen lasten suoriutumiset työmuistitehtävissä eivät aina korreloi keskenään. Tämä tarkoittaa sitä, että vaikka matemaattisesti heikoilla lapsilla on tavallisesti heikko työmuisti, heidän työmuistiprofiilinsa vaihtelevat. (Kyttälä, 2008.)

Lapsille, joilla on ongelmia matematiikan oppimisessa, näyttäisi sarjallisen tiedon muistaminen olevan ongelmallisempaa kuin yksittäisten ärsykkeiden muistaminen (Attout & Majerus, 2015, s. 444). Tämä havainto vaikuttaa loogiselta, sillä juuri järjestyksen muistaminen on matematiikassa keskeistä. Esimerkiksi moninumeroisilla luvuilla laskeminen vaatii yksittäisen numeron paikan muistamista, sillä pienikin järjestykseen liittyvä virhe vaikuttaa tehtävän onnistumiseen. Ei siis riitä, että yksittäiset numerot muistetaan, sillä myös niiden järjestyksellä on merkitystä. (Koponen ym., 2019.)

Gearyn ja kollegoiden (2012) mukaan verrattuna tavallisesti matematiikassa menestyviin lapsiin lapsilla, joilla on dyskalkulia, on vaikeita ja pysyviä vajavaisuuksia tallettaa aritmeettisia faktoja pitkäaikaiseen muistiin ja noutaa niitä sen jälkeen, kun ne ovat opittu. Kyse ei ole siitä, etteivätkö he muistaisi ollenkaan aritmeettisiä faktoja, vaan he muistavat niitä vähemmän kuin muut ja he tekevät enemmän virheitä, etenkin epätyypillisiä virheitä, kun he hakevat faktoja muistista. (Geary ym., 2012.)

Lapsilla, joilla on vaikeita oppimisen vaikeuksia matematiikassa, aritmeettisten faktojen hakeminen muistista näyttäisi kehittyvän hitaasti ja he eivät tule todennäköisesti saamaan muita lapsia kiinni kehityksessä. Ne lapset, jotka ovat matemaattisilta taidoiltaan heikkoja, ottavat enemmän kiinni kehityksessä tavallisesti menestyviä lapsia, vaikka heidän lähtötasonsa on suhteellisen sama kuin lapsilla, joilla on dyskalkulia. Heidän kehitystasonsa viidennellä vuosiluokalla on verrattavissa tavallisesti menestyvien lasten toisen vuosiluokan menestykseen. (Geary ym., 2012.)

Geary (2004) on luonut matemaattisten oppimisvaikeuksien taustalla olevien kognitiivisten ongelmien pohjalta mallin, joka sisältää kolme alatyyppeä: proseduraalinen vaikeus, semanttisen muistin vaikeus ja visuospatiaalinen vaikeus. Proseduraalinen vaikeus näkyy useina laskuvirheinä yksinkertaisten aritmeettisten ongelmien laskemisessa. Lisäksi vaikeuteen liittyy kehi-

tyksellisesti kypsyttömät strategiat laskemisessa kuten sormien avulla laskeminen. Ongelmat ilmenevät myös vaikeutena ymmärtää matemaattisia käsitteitä ja suorittaa monimutkaisia vaiheittain tehtäviä laskutoimituksia. Semanttisen muistin heikkoudet ilmenevät vaikeuksina hakea matemaattisia faktoja pitkäaikaisesta muistista ja näiden faktojen virheellisyytenä. Visuospatiaaliset vaikeudet näkyvät tehtävissä, joissa numeerista informaatiota ja suhteita täytyy tulkita spatiaalisesti tai kolmiulotteisesti. (Geary, 2004.) Koposen ja kollegoiden (2019) mukaan visuospatiaalisen eli näköhavaintoihin ja tilan havaitsemiseen liittyvän tiedon käsittelyn ongelmat voivat näkyä myös lukukäsitteen ja lukujärjestelmätiedon kehittymisen haasteina. Lisäksi luvun rakenteen ja paikka-arvotiedon käsitteleminen voi tuottaa haasteita, kuten myös lukuyksiköiden välisten suhteiden käsitteleminen. (Koponen ym., 2019.)

Kyttälä (2010) toteaa, että kyvyt säilyttää ja käsitellä lyhytaikaisesti visuaalis-spatiaalista tietoa ovat yhteydessä suoriutumiseen matemaattisissa tehtävissä. Hyvä suoriutuminen visuaalis-spatiaalisen työmuistin suorituskyykyä mittaavassa tehtävässä näkyy myös hyvänä suoriutumisena matematiikassa. On havaittu, että alle kouluikäisillä 4–6-vuotiailla lapsilla, jotka kuuluvat matemaattisten oppimisvaikeuksien riskiryhmään, on suoriutuminen visuaalis-spatiaalisissa työmuistitehtävissä selkeästi heikompaa kuin verrokkiryhmällä. Huomioitavaa on myös se, että riskilapset olivat heikkoja myös kielellisiltä työmuistitaidoiltaan. (Kyttälä, 2010.)

Joskus ongelmat oppimisessa saattavat kognitiivisella tasolla esiintyä erityisesti kielellisissä taidoissa, kuten esimerkiksi fonologisessa prosessoinnissa, nimikkeiden oppimisessa ja nopeassa nimikkeiden mieleen palauttamisessa, kielen rakenteiden ymmärtämisessä ja kielellisessä työmuistissa. (Koponen ym., 2019.) Monosen ja kollegoiden (2017) mukaan sanavaraston hallinta, fonologinen tietoisuus ja painettuun kieleen liittyvät taidot näyttäisivät ennustavan hyvin matemaattista oppimista ja osaamista.

### **4.3 Päällekkäistyminen**

Vaikka oppimisvaikeuksia yleensä koetetaan diagnosoida erillisinä, niillä on tapana myös päällekkäistyä. Oppimisvaikeuksien päällekkäistymisellä eli komorbideetilla tarkoitetaan sitä, että samalla henkilöllä on useita erillisiä oppimisvaikeuksia. (Aro ym., 2012.) Myös matemaattiset oppimisvaikeudet voivat esiintyä yhdessä muiden vaikeuksien kanssa. Tällaisia ovat esimerkiksi lukemisen ja kirjoittamisen erityisvaikeus eli lukivaikeus. (Mononen ym., 2017.)

Korhonen, Linnanmäki ja Aunio (2014) havaitsivat tutkimuksessaan, että lukemisen ja matemaattisen osaamisen välillä on selkeä yhteys. Lukemisen ja matemaattisten oppimisvaikeuksien päällekkäistyminen on havaittu olevan tavallista vanhemmilla oppilailla. Näiden kahden vaikeuden päällekkäiseen ilmenemiseen on olemassa monia syitä. Esimerkiksi työmuistin kapasiteetti on yksi todennäköinen kognitiivinen selittäjä. (Korhonen ym., 2018.) Kyttälä (2008) toteaa, että työmuistin heikkoutta esiintyy oppilailla, joilla on laaja-alaisia oppimisvaikeuksia, mikä voisi selittää osaltaan matemaattisten ja lukivaikeuksien päällekkäistymisen.

Lukivaikeuksien ja matemaattisten oppimisvaikeuksien päällekkäisyys voi tuottaa monenlaisia ongelmia. Jos oppilaalla esiintyy lukivaikeuden lisäksi matemaattisia haasteita, saattaa silloin jäädä huomaamatta se, että matematiikassa ilmenevät ongelmat ovat luonnoltaan kielellisiä, sillä esimerkiksi sanallisissa matematiikan tehtävissä vaaditaan sujuvaa lukutaitoa. Myös matemaattisen käsitteistön oppiminen on luonteeltaan samanlaista kuin sanaston oppiminen, sillä siinäkin vaaditaan fonologista prosessointia. (Korhonen ym., 2018.) On kuitenkin selvää, että oppilailla, joilla on vaikeuksia sekä lukemisessa että matematiikassa, on suoriutuminen matematiikassa kaikista heikointa verrattuna ryhmiin, joilla on pelkästään lukivaikeus tai matemaattisia oppimisvaikeuksia (Mononen ym., 2017).

Korhonen, Linnanmäki ja Aunio (2012) havaitsivat tutkimuksessaan, että lapsilla, joiden matemaattinen suoriutuminen oli heikkoa, suoriutuivat myös heikosti sanojen ja luetun ymmärtämisestä sekä oikeinkirjoituksesta. On myös havaittu, että niillä lapsilla, joilla matemaattiset taidot ovat heikot, lukemisen ongelmat liittyvät pääasiallisesti dekodaukseen. Puolestaan ne lapset, joilla on dyskalkulia, kokevat ongelmia sekä dekodauksessa että lukemisen sujuvuudessa. (Murphy ym., 2007, s. 474.)

Koposen, Monosen ja Puuran (2018) mukaan myös kielellinen erityisvaikeus voi vaikuttaa matematiikan oppimiseen. Kielellisellä erityisvaikeudella tarkoitetaan kehityksellistä häiriötä, joka ilmenee erilaisina kielellisten taitojen kehittymisen ja hallinnan ongelmina. Oppilaat, joilla on kielellinen erityisvaikeus, eivät kuitenkaan muodosta yhtä heterogeenistä ryhmää matematiikan osaamisessa. On kuitenkin havaittu, että etenkin lukujonotaidot, matemaattisten peruskäsitteiden hallinta ja sujuva laskutaito tuottavat haasteita näille oppilaille. Alle kouluikäisillä lapsilla, joilla on kielellinen erityisvaikeus, on havaittu olevan haasteita matemaattis-loogisten taitojen, lukujonon luettelemisen ja lukumäärän laskemisen oppimisessa. Kouluiässä puolestaan kielellinen erityisvaikeus vaikeuttaa suhdokäsitteiden ymmärtämistä, lukujen kirjoittamista ja laskemisen sujuvuutta (Koponen, Mononen & Puura, 2018.)



## **5 Oppimisen tuki matemaattisissa oppimisvaikeuksissa**

Perusopetuslaissa todetaan, että jokaisella opetukseen osallistuvalla on oikeus saada riittävää oppimisen ja koulunkäynnin tukea heti, kun sitä ilmenee (Perusopetuslaki 30 §). Tuen järjestäminen tapahtuu kolmella tasolla, jotka ovat yleinen, tehostettu ja erityinen tuki. Huomio tulee kohdentaa oppimisvaikeuksien ennaltaehkäisyyn ja varhaiseen tunnistamiseen. Tuen antamisella pyritään ehkäisemään ongelmien monimuotoistumista sekä pitkäaikaisvaikutuksia. Jotta tuen tarve voidaan havaita varhain, tulee oppilaiden edistymistä ja koulunkäynnin tilannetta arvioida jatkuvasti. (Opetushallitus, 2014b.) Vaikka varhaiseen tunnistamiseen ja vaikeuksien ennaltaehkäisyyn pyritään, on erityisopetuksessa oleva oppilasmäärä kasvanut lähes koko 2000-luvun. Isointa kasvua on esiintynyt matematiikan osa-aikaisessa erityisopetuksessa, jossa kasvu on ollut keskimääräisesti yhdeksän prosenttia vuodessa. (Räsänen ym., 2010, s. 165.)

Tiedetään, että tärkein yksittäinen syy koulun keskeyttämiselle on oppimisvaikeudet. Lisäksi matemaattisten oppimisvaikeuksien vaikutus opintojen keskeytymiselle on voimakkaampaa verrattuna lukemisen ongelmien vaikutukseen. (Korhonen ym., 2018, s. 258.) Huomion arvoista on se, että niistä oppilaista, jotka kokeiden perusteella kuuluivat heikosti suoriutuviin oppilaisiin matematiikassa, 40% ei ole saanut lisätukea tai on saanut sitä vähäisissä määrin. Lisäksi niistä oppilaista, jotka opettajan arvion mukaan tarvitsevat tunneilla paljon tukea, yli neljäsosa ei ole saanut tuki- tai erityisopetusta tai on saanut sitä vähäisessä määrin. (Räsänen ym., 2010, s. 189.) On siis selvää, että niitä oppilaita, joilla on haasteita matematiikan oppimisessa, tulisi tukea entistä enemmän. Ongelmat tulisi havaita mahdollisimman varhain ja niihin tulisi antaa oikeanlaista tukea. Seuraavaksi lähden kartoittamaan, mitä mahdollisia varhaisen tunnistamisen keinoja on, miten matemaattisia oppimisvaikeuksia voidaan tunnistaa ja miten matematiikan oppimista voidaan tukea.

### **5.1 Varhainen tunnistaminen**

Oppimisvaikeuksien mahdollisimman varhainen tunnistaminen on tärkeää. Yleensä vaikeimmat oppimisen ongelmat havaitaan ennen peruskoulun loppua mutta joskus ne ilmenevät vasta jatko-opinnoissa. Tällaisissa tapauksissa lapselle tai nuorelle on usein kertynyt jo muita ongelmia kuten uupumusta, mielialuongelmia tai itsetunnon heikkoutta. Jos oppimisvaikeus jää tunnistamatta, se lisää merkittävästi riskiä mielenterveydenhäiriöille, syrjäytymiselle ja opintojen

keskeyttämiselle. (Nylund, 2011.) Oppimisvaikeuksien hoidossa tärkeää on siis myös sekundaaristen oireiden, kuten huonon koulumenestyksen tai häiriökäyttäytymisen, ehkäisy (Mikkonen ym., 2015).

Oppimisvaikeudet voidaan todeta vasta kouluiässä, mutta oppimisen valmiuksia olisi hyvä havainnoida jo aikaisemmin. Lapsen taitoja ja kehitystä tulisi arvioida säännöllisesti ja tarvittaessa järjestää tukitoimia. (Aro, Ahonniska-Assa, Aro & Ahonen, 2019.) Mikkosen ja kollegoiden (2015) mukaan ennen peruskoulun alkamista aloitetut tukitoimet hyödyttävät kognitiivisten taitojen kehityksessä ja koulussa suoriutumisessa. Myös Kantelinen ja Vierikko (2017) toteavat, että varhain aloitetulla kuntoutuksella näyttäisi olevan positiivinen vaikutus kohteena olevaan taitoon ja lapsen on mahdollista saavuttaa yleinen taitotaso koulupolun alussa vaikeuksista huolimatta.

Kuten myös muissa kehityksellisissä vaikeuksissa myös matematiikan oppimisen vaikeuksissa haasteet ovat havaittavissa jo varhaisessa vaiheessa (Koponen ym., 2019). On ilmeistä, että varhaisessa vaiheessa annettavalle tuelle on tarvetta mutta oppimisvalmiuksien kehittämistä tukevat toimet aloitetaan silti pääsääntöisesti vasta koulussa. Etenkin 4–5-vuotiaiden lapsien matemaattisten taitojen tukeminen ja mahdollisten matemaattisten oppimisvaikeuksien ennaltaehkäisy on jäänyt vähemmälle huomiolle suomalaisessa varhaiskasvatuksessa. (Mattinen, Räsänen, Hannula & Lehtinen, 2010, s. 42.)

Jotta tuen antaminen voidaan aloittaa varhain ja tuki kohdennettua oikein, vaatii se ymmärrystä matematiikan osataitojen päällekkäisestä rakentumisesta ja siitä, että vaikeudet voivat näkyä eri taidoissa. (Koponen ym., 2019.) On vahvasti osoitettu, että varhaiset matemaattiset taidot ovat yhteydessä myöhempään matematiikan oppimiseen (Aunola ym., 2004) ja että varhain opitut matemaattiset taidot ennustavat myöhempää matemaattista osaamista (Merkley & Ansari, 2016, s. 14). Varhaisia matemaattisia taitoja koskevissa tutkimuksissa on löydetty ne taidot, jotka ennustavat hyvin matematiikan osaamista peruskoulussa.

Aunolan ja Nurmen (2018) mukaan yksi oleellisimmista matemaattisten taitojen kehitystä ennustavista tekijöistä on varhaiset lukujonotaidot eli lapsen ymmärrys lukujen keskinäisestä järjestyksestä ja taito luetella lukujonolla. Onkin havaittu, että 19% aritmeettisten taitojen kehityksestä kouluvuosina selittyy varhaisilla lukujonotaidoilla. Lapsen aritmeettiset taidot kehittyvät sitä nopeammin mitä paremmat hänen lukujonotaitonsa ovat. (Aunola ym., 2004.) Myös yksinkertaisten yhteen- ja vähennyslaskujen (Aunola ym., 2004), matemaattis-loogisten peri-

aatteiden ja suhdekäsitteiden hallitsemisen (Aunio & Niemivirta, 2010) ja lukusuoran sekä lukumäärien erojen ymmärtämisen ja järjestämisen (Merkley & Ansari, 2016) on havaittu ennustavan myöhempiä matemaattista osaamista.

Aunio (2008) mukaan myös lukumäärän laskemisen taito on yksi myöhempiä matemaattista osaamista ennustava tekijä. Lisäksi on huomioitava, että lapsilla, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, esiintyy todennäköisesti kehityksen haasteita kaikissa varhaisissa matemaattisissa taidoissa esi- ja alkuopetuksen aikana. (Aunio, 2008.) Nämä varhaiset matemaattiset taidot ovat merkityksellisiä siinä, kuinka hyvin aritmeettisia peruslaskutaitoja opitaan ja kuinka hyvin ne sujuvoituvat (Mononen ym., 2017). Näillä taidoilla on siis myös merkitystä myöhemmälle matematiikan osaamiselle ja jos jollain osa-alueella ilmenee heikkoutta, tuottaa se haasteita matematiikan oppimiselle. Siksi onkin tärkeää, että myös yksittäisissä taitoalueissa ilmenevät haasteet havaittaisiin mahdollisimman varhain. (Kantelinen & Vierikko, 2017.) Tiedostamalla varhaisten matemaattisten taitojen merkityksen myöhemmälle oppimiselle sekä niiden taitojen, jotka ennustavat hyvin myöhempiä osaamista, kartoittamisen avulla voidaan jo varhain tunnistaa ne lapset, jotka tarvitsevat tukea matematiikan oppimisessa.

## 5.2 Arviointi

Yleensä lapsen haasteet oppimisessa ilmenevät jo havainnoimalla lasta koulun ja kodin arjessa. On kuitenkin tärkeää, että havainnoimisen rinnalla hyödynnetään päteviä arviointivälineitä, jotta mahdollinen tuen tarve voidaan tunnistaa. Säännöllisesti toteutettu, koko ikäryhmään kohdentuva matemaattisten taitojen arviointi helpottaa keskeisten taitojen oppimisen ja oppimistuloksen pysyvyyden seuraamista. (Koponen ym., 2019.) Arviointityössä tulisi käyttää monipuolisesti erilaisia tiedonhankintamenetelmiä. Erilaiset tiedonkeräämismenetelmät voidaan karkeasti jakaa kolmeen ryhmään: matemaattisten taitojen kehityksen mittarit, opetussuunnitelmapohjaiset mittarit sekä muut tiedonkeräysmenetelmät. (Aunio, Hautamäki & Mononen, 2018.) Arvioinnin avulla on mahdollista havaita ne lapset, jotka tarvitsevat tai tulevat tarvitsemaan tukea matematiikan oppimisessa.

### *Seulat ja testit*

Seuloilla ja testeillä on aina teoreettinen ja tutkimuksellinen perusta, ja ne ovat joko normiperusteisia tai kriteeripohjaisia (Aunio ym., 2018). Jos testi tai seula on normiperustainen, verra-

taan suorituksia vertailuaineistoon. Kriteeriperustaisessa testissä/seulassa hyödynnetään ennalta päätettyjä ja aineistoon perustuvia arviointiperusteita ja lapsen suoritusta arvioidaan niiden kautta. (Mononen ym., 2017.) Seulojen ja testien avulla voidaan seuloa ensin koko opetusryhmä, jotta voidaan tunnistaa ne, joilla on mahdollisia haasteita ja vaikeuksia. Tämän jälkeen joukosta otetaan pois ne, joilla ei ole todellista oppimisen haastetta. Seulalla tulisi olla korkea sensitiivisyys, jotta voidaan tunnistaa kaikki ne oppilaat, joilla saattaa olla haasteita oppimisessa. Testin puolestaan täytyy olla erityisen tarkka, jotta voidaan erotella ne oppilaat, joilla todellisuudessa on vaikeuksia oppimisessa niistä oppilaista, joilla vaikeuksia ei ole. (Aunio ym., 2018.)

Mavalka (Lampinen, Ikäheimo & Dräger, 2007) on kriteeripohjainen kartoitus, jonka tavoitteena on selvittää lapsen matemaattiset valmiudet. Se tehdään yksilöllisesti ja sen avulla saadaan tietoa lapsen lukukäsitteen osa-alueiden hallinnasta. Kartoituksen kohteena olevat osa-alueet ovat lukumäärän, lukusanan ja numeromerkinnän yhteys. Tämän lisäksi testi kartoittaa lukumäärillä vertailua ja lukumäärien lisäämistä ja vähentämistä. Mavalka sisältää myös lukujonot-osion, jossa kartoitetaan osaako lapsi esimerkiksi kirjoittaa yksinumeroiset luvut suuruusjärjestyksessä ja mihin saakka lapsi osaa luetella lukuja. Lisäksi selvitetään, miten hyvin lapsi osaa luetella lukuja takaperin ja luetella lukuja keskeltä lukujonoa eteenpäin ja annettuun lukuun saakka tai annetun määrän verran. Myös esineiden lukumäärän laskemista kartoitetaan. (LukiMat-verkkopalvelu.)

Lukukäsitetestillä (Van Luit, Van de Rijt & Aunio, 2006) mitataan 4–7½-vuotiaiden lasten lukukäsitteen hallinnan tasoa. Testin avulla voidaan arvioida, kuinka hyvin lapsella tai lapsiryhmällä on hallussa lukukäsite. Lukukäsitteestä mittauksen kohteena on kahdeksan eri osa-aluetta: luokittelu, vertailu, vastaavuus, järjestäminen, lukusanojen luetteleminen, samanaikainen ja lyhentynyt laskeminen, tuloksen laskeminen ja lukukäsitteen soveltaminen. (LukiMat-verkkopalvelu.)

BANUCA (Räsänen, 2005) on normitettu testi/seula, jossa seulotaan 1–3 luokka-asteiden oppilaiden lukukäsitettä ja laskutaidon oppimisvaikeuksia. Testin avulla voidaan arvioida sekä ryhmiä että yksilöitä. Mittauskohteena on lukumäärien vertailu, luvun ja määrän vastaavuus, yhteen- ja vähennyslasku, lukusarjan täydentäminen, lukujen vertailu, aritmeettinen päättely ja useampinumeroisten lukujen laskut. Seulonnan jälkeen voidaan tehdä tarkempi yksilötutkimus. RMAT-laskutaidon testi (Räsänen, 2004) arvioi 3–6 luokka-asteiden oppilaiden laskutaitoa.

Kohteena on erityisesti ne oppilaat, joilla epäillään olevan viivettä laskutaidossa verrattuna luokkatasoon tai saadun opetuksen määrään. (LukiMat-verkkopalvelu.)

Myös LukiMat- verkkopalvelu on kehittänyt tunnistamisvälineen, jonka avulla voidaan tunnistaa ne oppilaat, joilla on tuen tarvetta matematiikassa. Arvioinnin voi toteuttaa esiopetuksessa ja perusopetuksen luokille 1 ja 2. Arvioinnissa tarkastellaan matematiikan perustaitoja eli lukumääräisyydentajua, matemaattisten suhteiden hallintaa, laskemisen taitoja ja aritmeettisia perustaitoja. Arviointi on suunniteltu toteutettavan kolmena ajankohtana: lukuvuoden alussa (syksy), lukuvuoden keskellä (talvi) ja lukuvuoden lopussa (kevät). Arviointivälineen avulla varhaiskasvattaja tai alkuopetuksen opettaja voi kartoittaa oman ryhmänsä lasten matemaattisten perustaitojen hallintaa ja verrata tuloksia viiteryhmän osaamistasoon. (LukiMat-verkkopalvelu.)

#### *Opetussuunnitelmapohjainen arviointi*

Yksi tiedonhankintamenetelmä on opetussuunnitelmapohjainen arviointi, jossa arviointivälineet voidaan jakaa kahteen ryhmään: formatiiviseen ja summatiiviseen arviointiin. Formatiiivisessa arvioinnissa tarkoituksena on seurata oppilaiden edistymistä pienissä kokonaisuuksissa. (Mononen ym., 2017.) Tällaisen arvioinnin etu on se, että ne antavat välitöntä palautetta siitä, kuinka hyvin annettu opetus vastaa oppilaiden tarpeita. Edistymisen seuranta on etenkin tärkeää silloin, kun oppilaan oppiminen on vaikeaa ja hidasta. (Aunio ym., 2018.)

Summatiivisessa arvioinnissa keskitytään laajempiin taitokokonaisuuksiin. Nämä taitokokonaisuudet ovat yleensä kirjattu opetussuunnitelman perusteisiin. (Mononen ym., 2017.) Tällaisen arvioinnin tavoitteena on kartoittaa, kuinka hyvin oppilas on saavuttanut opetussuunnitelman tavoitteet. Summatiivisen arvioinnin avulla saadaan tietoa esimerkiksi siitä, kuinka hyvin yleisopetuksen tuki riittää oppilaan matemaattisten taitojen kehitykseen. (Aunio ym., 2018.)

MAKEKO (Ikäheimo, Putkonen & Voutilainen, 2002) on opetussuunnitelmaan pohjautuva arviointiväline, jota voidaan käyttää myös seulana (Aunio ym., 2018). Testin avulla saadaan tietoa siitä, kuinka hyvin oppilas osaa keskeiset matematiikan sisällöt (LukiMat-verkkopalvelu). MAKEKOSSA on asetettu oikein ratkaistujen tehtävien prosenttiluvun avulla huoliraja-arvo. On kuitenkin huomioitava, että arviointivälinettä ei ole normitettu, vaan pisterajat perustuvat tekijöiden kokemuksiin. Tästä huolimatta MAKEKO on laajassa käytössä suomalaisessa perusopetuksessa. (Aunio ym., 2018.)

#### *Muut arviointimenetelmät*

Lapsen matemaattista osaamista voidaan arvioida myös muilla menetelmillä kuten haastattelulla ja havainnoinnilla. Havainnoinnin avulla voidaan lapsen toimintaa seurata hänen omassa oppimisympäristössään. Havainnointi on systemaattista ja havainnot kirjataan aina muistiin. (Mononen ym., 2017.) Havainnoimalla tietoa voidaan kerätä joko strukturoidusti tai strukturoimattomasti. Jos havainnointi on strukturoitua, seurataan lapsen toiminnasta ennalta päätettyjä asioita ja arvioidaan toimintaa esimerkiksi asteikolla 1= hallitsee taidon ja 0= ei hallitse taitoa. Jos havainnointia ei strukturoida, kerätään lapsen toiminnasta kuvailevaa tietoa. Havainnoinnin avulla voidaan saada tietoa lapsen valmiuksista ja taidoista (Koponen ym., 2019.) Haastattelussa saadaan tietoa lapsen vahvuuksista ja haasteista eri ihmisiltä. Haastattelut tarjoavat monipuolista lisätietoa lapsen osaamisesta seulojen ja testien lisäksi. (Koponen ym., 2019.) Haastattavana voi olla esimerkiksi lapsi itse tai hänen vanhempansa. Parhaimmillaan haastattelut tuottavat arvokasta tietoa lapsen oppimista tukevista ja heikentävistä tekijöistä. Tällainen tieto on tärkeää silloin, kun lapselle annettavaa tukea suunnitellaan. (Mononen ym., 2017.)

### **5.3 Tukikeinoja**

Parrilan, Gadsdenin ja Aron (2019) mukaan matemaattisia oppimisvaikeuksia koskeva interventiotutkimus on vielä suppeaa, eikä sellaisia tukikeinoja, joilla olisi vahvaa näyttöä, ole paljon saatavilla. Kuitenkin teoreettista tietoa matemaattisten taitojen kehityksestä voidaan hyödyntää matemaattisten oppimisvaikeuksien tukemisessa. Teorian avulla tiedetään, että tärkeintä on tukea matemaattisia perusvalmiuksia ja hierarkkisesti alimpia taitoja. (Parrila, Gadsden & Aro, 2019, s. 74.)

Matemaattisia oppimisvaikeuksia voidaan tukea säännöllisellä, intensiivisellä ja tavoitteellisella harjoittelulla (Koponen ym., 2019). Lisäharjoittelun tulisi kohdistua niihin varhaisiin matemaattisiin taitoihin, joissa oppilaalla ilmenee vaikeuksia (Geary, 2011; Salminen, 2016). On tärkeää ymmärtää, mitä lapselle ollaan opettamassa, miten lasta tuetaan ja millaisia opetusmenetelmiä käytetään (Salminen, 2016). Jos oppimisen ongelmat ovat laajat, tarvitaan erittäin pitkäjänteistä, yksilöllistä ja intensiivistä tukea. Tällöin myös tuen vaikuttavuuden arvioiminen ja sen sisällön muokkaaminen on tärkeää. (Fuchs ym., 2008; Salminen, 2015.)

Aritmeettisia perustaitoja voidaan tukea erilaisilla harjoitteilla. Drillaavia harjoitteita tekemällä tavoitteena on tukea lukujen välisten yhdistelmien muodostumista ja aritmeettisten faktojen ha-

kemista muistista. Keskeistä näissä harjoitteissa on runsaat toistomäärät ja välitön palaute. Harjoitteissa käytetään usein aikapainetta, jotta oppilas joutuisi käyttämään nopeita ratkaisukeinoja eli vastauksen hakemista muistista. (Koponen ym., 2019.)

Lapset, joilla esiintyy haasteita matematiikan oppimisessa, käyttävät usein hitaita luetteluun tukeutuvia laskustrategioita (Koponen, 2012). Toinen lähestymistapa aritmeettisten perustaitojen tukemiseen onkin strategiaperustainen harjoittelu (Koponen ym., 2019). Harjoittelussa oppilaan laskustrategioita pyritään kehittämään nopeammiksi ja tehokkaimmiksi. Lasta ohjataan oppimaan erilaisia laskustrategioita kuten käsitteelliseen tietoon eli lukujen ja laskutoimitusten ymmärtämiseen perustuvia laskustrategioita. Tällaisen strategian oppimisella voidaan tukea myös sujuvaa laskutaitoa. (Koponen, 2012.)

Tuen antamisessa on tärkeää ennakoida ja eliminoida väärinymmärrykset hyvän ja tarkan ohjeistuksen avulla. Lisäksi opetuksen tulisi tarjota vahva käsitteellinen perusta opetettavalle aiheelle. Erityisopetuksessa on usein painotettu intensiivistä harjoittelua mutta matematiikan käsitteellinen perusta on usein jätetty vähemmälle huomiolle. Jos oppilaat eivät ymmärrä matemaattisia käsitteitä, aiheuttaa se hämmennystä ja osaamiserojen kasvua. Lisäksi tällöin myös aiemmin opitun tiedon ja taidon säilyttäminen ja integroiminen epäonnistuu. (Fuchs ym., 2008.)

Geary (2011) on havainnut, että eksplisiittinen opettajajohtoinen opetus on yksi tehokkaimmista interventiomenetelmistä. Jotta menetelmä olisi tehokas vaatii se useita oppitunteja pitkällä aikavälillä. Tulokset osoittivat, että oppilaiden kyky ratkaista sanallisia matematiikan tehtäviä, laskennallisia aritmetiikan tehtäviä sekä uusia sanallisia ja aritmeettisiä tehtäviä parantui merkittävästi. On kuitenkin tärkeää huomioida, että tietyn taidon kehittäminen vaatii interventiota juuri siihen taitoon, jota halutaan kehittää. (Geary, 2011.) Eksplisiittisessä opetusmenetelmässä opettaja demonstroi vaihe vaiheelta, miten tietty laskutyyppi lasketaan. Oppilaiden tehtävänä on harjoitella opetetun menetelmän käyttöä ohjattuna. Opettaja on keskeisessä roolissa harjoittelun alkuvaiheessa, mutta mitä pidemmälle harjoittelussa mennään, sitä vähemmän oppilaat tarvitsevat tukea ja he suoriutuvat tehtävistä itsenäisemmin. (Mononen ym., 2017.)

Kroesbergen, Van Luit ja Maas (2004) tutkivat miten tehokkaita eksplisiittinen opetus ja konstruktiivinen opetus ovat opettaessa matemaattisesti heikkoja oppilaita. Konstruktiivisessa opetusmenetelmässä keskitytään keskustelemaan mahdollisista ratkaisumenetelmistä ja strategioista. Opettaja esittää ongelman, johon oppilaiden täytyy itse keksiä ratkaisu ja täten kartuttaa omaa matemaattista tietoaan. Tässä menetelmässä opettaja ei demonstroi miten tiettyä strategiaa käytetään. Eksplisiittisessä menetelmässä opettaja puolestaan demonstroi miten tietyn

tyyppinen tehtävä ratkaistaan ja antaa esimerkkejä hyvästä ratkaisumenetelmästä. Oppilaiden tehtävä on seurata esimerkkiä. Menetelmässä hyödynnetään myös havainnoivia välineitä, kuten palikoita tai lukujonoa. (Kroesbergen, Van Luit & Maas, 2004.)

Tulokset osoittivat, että molemmat opetusmenetelmät ovat tehokkaita verrattuna kontrolliryhmään, jolle annettiin tavallista opetusta. Eksplisiittisen opetuksen havaittiin olevan tehokkaampaa kuin konstruktiiivinen opetus. Eksplisiittisessä opetuksessa olevien oppilaiden ongelmanratkaisukyvyt ja laskemisen automatisoituminen kehittyi. Lisäksi he käyttivät monipuolisempia ja tehokkaampia strategioita laskemisessa verrattuna kontrolliryhmään. Myös konstruktiiivisen opetuksen oppilaat kehittyivät laskemisen automatisoitumisessa ja ongelmanratkaisussa. (Kroesbergen, Van Luit & Maas, 2004.)

Bryant ja kollegat (2014) ovat havainneet, että pienille ryhmille tehtävä interventio, joka on intensiivinen, strateginen ja eksplisiittinen, hyödyttää myös kaikista heikommin suoriutuvia oppilaita. Dräger (2015) toteaa, että matematiikan vaikeudet ovat yksilöllisiä, jolloin myös kuntouttavan opetuksen täytyisi olla yksilöllistä. Kuntouttavassa opetuksessa lähtökohtana toimii joko esimatemaattiset harjoitukset tai keskeiset oppisisällöt lukualueella 0-20. Kuntoutuksessa hyödynnetään myös konkreettisia välineitä. (Dräger, 2015.) Monosen ja kollegoiden (2017) mukaan havainnollistavilla välineillä autetaan oppilaita ymmärtämään abstrakteja ja matemaattisia käsitteitä sekä laskutoimituksia.

#### **5.4 Tutkimusperustaiset harjoitusohjelmat**

Varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämisohjelma eli Nallematikka on suunnattu 4–5-vuotiaille lapsille (Mattinen ym., 2010). Suurin osa lapsille tarkoitetuista matemaattisista harjoitusohjelmista on pääsääntöisesti suunnattu esikouluikäisille ja vanhemmille lapsille. Nallematikka on suunniteltu järjestettäväksi osana päiväkodin toimintaa ja sen tarkoitus on ensisijaisesti tukea sellaisia lapsia, jotka ovat näyttäneet neljän vuoden ikään mennessä tunnistettavia puutteita matemaattisissa taidoissa ja myös muilla oppimisen alueilla. Nallematikan tavoitteena on mahdollistaa varhaisessa vaiheessa tapahtuva tuen tarpeen tunnistaminen ja varhaisen tuen tarjoaminen. (Mattinen, Räsänen, Hannula & Lehtinen, 2008.)

Nallematikka jakautuu sisällöltään kahteen vaiheeseen, jossa kummassakin on 10 pienryhmäkertaa. Ensimmäisessä vaiheessa keskitytään auttamaan lapsia rakentamaan tietoinen perusta



lukumääriin ja lukuihin liittyvän tiedon käsittelemiselle. Toisessa vaiheessa harjoitellaan laskemisen periaatteita kielellisen laskemisen avulla. (Mattinen ym., 2010.) Ohjelman tavoitteena on siis matemaattisten taitojen ja oppimisvalmiuksien kehittäminen siten, että lapset alkaisivat omatoimisesti havaitsemaan ympäristössään esiintyviä matemaattisia ilmiöitä (Mattinen ym., 2008). Nallematikan vaikuttavuutta tutkittiin ja havaittiin, että intervention aikainen matemaattisten taitojen sekä muistisuoritusten kehitys oli selkeää, vaikka kontrolliryhmä puuttuikin. Nallematikan avulla voitiin myös todeta se, että lasten matemaattisten ja yleisten oppimisvalmiuksien kehitykseen voidaan vaikuttaa. Lisäksi tulokset osoittivat, että varhaisessa vaiheessa vaikuttamisesta hyötyvät myös ne lapset, joille oppiminen on haasteellista. (Mattinen ym., 2010.)

Minäkin lasken! – harjoitusohjelma (Van Luit, Aunio & Räsänen, 2010) on suunnattu 4–7-vuotiaille lapsille, joilla on heikko lukukäsitetieto. Harjoitusohjelma korostaa oppimista lasten oikeissa ympäristöissä ja tavoitteena on ohjata lasta omien ratkaisumallien kehittämiseen. (Väisänen & Aunio, 2014.) Ohjelman tarkoituksena on harjoitella lukualueella 1-15 ja lisäksi myös muita lukukäsitteen osa-alueita kuten luokittelua ja sarjoittamista. Ohjelma rakentuu neljän teeman ympärille: perhe, juhlat, kauppa ja posti. Materiaaleina käytetään konkreettisia ja semi-konkreettisia esineitä sekä formaaleja symbolikortteja. (Lusetti & Aunio, 2010.)

Lusetti ja Aunio (2010) tutkivat Minäkin lasken! – harjoitusohjelman vaikuttavuutta. Ryhmä, jolle harjoitusohjelma suoritettiin interventiona, erosi matemaattisilta taidoiltaan kontrolliryhmästä alkumittauksessa. Intervention aikana harjoitusohjelmaa käytettiin heikosti matematiikassa menestyvien lapsen harjoittamisessa. Tutkimusjakson aikana interventioryhmän lasten matemaattiset taidot kehittyivät enemmän kuin kontrolliryhmän. Suurin kehitys tapahtui lukukäsitteen hallinnassa. Loppumittauksessa ryhmien välistä eroa matemaattisissa taidoissa ei ollut, eikä eroja ollut havaittavissa vuoden jälkeen intervention lopettamisesta. (Lusetti & Aunio, 2010.)

SELKIS – yhteenlaskua ymmärtämään (Koponen, Mononen, Kumpulainen & Puura, 2011) on harjoitusohjelma, jonka tavoitteena on tukea lapsia, joilla on vaikeuksia muistaa aritmeettisiä yhdistelmiä, oppimaan tehokkaita laskustrategioita. Lapsille opetetaan tehokkaita yhteenlaskustrategioita, joiden käyttöä vahvistetaan pelinomaisen harjoittelun avulla. Keskeistä harjoitusohjelmassa on ymmärtämisen ja sujuvoitumisen näkökulmat. (Koponen, 2012.)

Harjoitusohjelma koostuu kahdestatoista opetuskokonaisuudesta, joissa jokaisessa keskitytään yhteen tiettyyn laskustrategiaan. Opetus koostuu ohjaajan pitämistä lyhyistä opetustuokioista

ja toiminallisista pari- ja ryhmätehtävistä. Harjoittelu sisältää pienryhmissä suoritettavia toiminnallisia tehtäviä ja pelejä. Lapset harjoittelevat löytämään lukujonosta ja laskuista säännönmukaisuuksia, joita he voivat hyödyntää ratkoessaan yhteenlaskuja lukualueella 1–20. Pelien avulla lapset pääsevät harjoittelemaan opittuja laskustrategioita ja saavat runsaasti toistomääriä. (Koponen, 2012.)

Ekapeli-Matikka on tietokonepeli, jonka tarkoituksena on tukea lasten taitoa tunnistaa pieniä lukumääriä nopeasti ja tarkasti. Lisäksi pelissä harjoitellaan laskemista ja lukusanojen, lukumäärien ja numerosymbolien vastaavuuden ymmärtämistä. (Koponen ym., 2019.) Salminen (2015) tutki Ekapeli-Matikan vaikuttavuutta ja havaitsi, että pelin pelaaminen näyttäisi kehittävän matemaattisilta taidoiltaan heikkojen esikouluikäisten lasten kykyä laskea lukumääriä. Taidoiltaan heikot esikouluikäiset vaikuttaisivat hyötyvän myös intensiivisestä perustaitojen ja yhteenlaskutaitojen harjoittelusta, sillä se näyttäisi edistävän heidän lukujono-, yhdistely- ja yhteenlaskutaitoja. (Salminen, 2015.)

## 6 Johtopäätökset

Tutkielman tavoitteena oli selvittää, mitä matemaattiset oppimisvaikeudet ovat eli kartoittaa sitä, miten oppimisvaikeus on määritelty, miten ongelmat ilmenevät matematiikan oppimisessa ja mistä ne johtuvat. Toisena tavoitteena oli selvittää, miten lapsia, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia, voidaan tukea. Tutkielmassa kartoitettiin siis sitä, miten matemaattiset oppimisvaikeudet voidaan tunnistaa ja kuinka niitä voitaisiin tukea eri menetelmillä ja harjoitusohjelmilla.

Matematiikan osaaminen pohjautuu varhaisiin matemaattisiin taitoihin, jotka yhdessä muodostavat toisiinsa nojaavan kokonaisuuden (Koponen ym., 2019; Mononen ym., 2017). Varhaiset matemaattiset taidot koostuvat neljästä eri taitokokonaisuudesta: lukumääräisyydentajusta, matemaattisten suhteiden ymmärtämisestä, laskemisen taidoista ja aritmeettiset perustaidoista (Aunio & Räsänen, 2015). Tutkimuksissa ilmenee, että nämä taidot ovat merkityksellisiä matematiikan oppimiselle koulussa ja ne ennustavat hyvin myöhempää osaamista matematiikassa. Jos näiden varhaisten taitojen hallinta on heikkoa, tuottaa se ongelmia matematiikan oppimiselle myöhemmässä vaiheessa. Matemaattiset oppimisvaikeudet ilmenevät usein näissä varhaisissa perustaidoissa (Mononen ym., 2017).

Matematiikan oppimisvaikeuksien määrittelemisen on tuottanut vaikeuksia alan tutkijoille (Mazzocco, 2007) ja niitä ei ole pystytty määrittelemään tarkka-rajaisesti ja yhtenäisesti (Aro ym., 2012). Ongelmat matematiikan oppimisessa voidaan jakaa dyskalkuliaan, jossa vaikeudet näkyvät peruslaskutaidoissa, ja heikkoon osaamiseen matemaattisissa taidoissa, jossa haasteet eivät ole yhtä vakava-asteisia. (Mononen ym., 2017.) Oppimisvaikeudet johtuvat keskushermoston kehityksen poikkeavuudesta (Aro ym., 2012) ja niiden taustalla on aivojen rakenteelliset/toiminnalliset poikkeavuudet (Nylund, 2011). Tutkimukset osoittavat, että dyskalkulian taustalla on erilaisia kognitiivisia heikkouksia, jotka näkyvät työmuistissa, visuaalis-spatiaalisessa työmuistissa ja numeerisen tiedon prosessoinnissa. Erityisiä vaikeuksia ilmenee aritmeettisten faktojen tallettamisessa muistiin ja niiden noutamisessa. (Geary, 2011.) On todettu, että tämä hankaloittaa peruslaskutoimitusten laskemista ja laskemisen sujuvuutta. Heikkojen matemaattisten taitojen taustalla voi olla kognitiiviset, motivaatioon tai oppimisympäristöön liittyvät syyt (Mononen ym., 2017).

Tutkimukset osoittavat, että vaikeudet matematiikan oppimisessa ilmenevät heikkona lukumääräisyydentajuna (Desoete ym., 2012), vaikeutena muodostaa aritmeettisiä faktoja muistiin ja

hakea niitä muistista sekä kehityksellisesti epäkypsinä laskustrategioina ja vaikeutena oppia laskutoimituksia (Geary, 2011). On todettu, että matemaattiset oppimisvaikeudet voivat ilmetä päällekkäisenä toisen oppimisvaikeuden kanssa. Ne lapset, joilla on sekä lukivaikeus että matemaattinen oppimisvaikeus suoriutuvat matemaattisista tehtävistä kaikista heikoiten verrattuna niihin lapsiin, joilla on pelkästään matemaattisia oppimisvaikeuksia tai lukivaikeus (Mononen ym., 2017). Kielellinen erityisvaikeus voi vaikuttaa matematiikan oppimiseen, ja ongelmat näkyvät erityisesti lukujonotaidoissa, peruskäsitteiden hallinnassa ja laskutaidon sujuvoitumisen haasteena. (Koponen ym., 2018).

Varhaiset matemaattiset taidot luovat perustan myöhemmälle oppimiselle (Mononen ym., 2017). Matematiikan osaamiselle keskeiset varhaiset taidot ennustavat vahvasti myöhempää osaamista matematiikassa (Merkley & Ansari, 2016). Tiedostamalla näiden taitojen vaikutukset myöhempään matematiikan oppimiseen voidaan havaita varhain ne lapset, jotka tulevat kokemaan haasteita matematiikan oppimisessa ja tarvitsemaan siinä tukea. Myös arviointia voidaan käyttää apuna tunnistamaan sellaiset lapset, joilla on vaikeuksia oppia matematiikkaa. Suomessa käytettyjä matemaattisia taitoja mittaavia seuloja ja testejä ovat Mavalka (Lampinen, Ikäheimo & Dräger, 2007), Lukukäsitetesti (Van Luit, Van de Rijt & Aunio, 2006), BANUCA (Räsänen, 2005) ja RMAT-laskutaidon testi (Räsänen, 2004). Lisäksi arviointia voidaan tehdä opetus suunnitelmapohjaisilla mittareilla ja muilla tiedonkeräysmenetelmillä (Aunio ym., 2018).

Interventiotutkimus koskien matemaattisia oppimisvaikeuksia on vielä vähäistä ja tutkimusperustaisia tukikeinoja on saatavilla vähän (Parrila yms., 2019). Drillaavien harjoitteiden ja laskustrategioiden opettamisen on havaittu olevan toimivia tukikeinoja (Koponen ym., 2019; Koponen, 2012). Eksplisiittisen opetuksen on tutkitusti havaittu olevan tehokas interventiomenetelmä oppilaille, joilla on haasteita matematiikan oppimisessa (Geary, 2011). Pienryhmissä suoritettava intensiivinen, strateginen ja eksplisiittinen interventio tukee jopa kaikista heikoiten menestyviä oppilaita (Bryant ym., 2014). Opetuksen yksilöllistäminen ja havainnoivien välineiden käyttö on todettu olevan tehokas tukikeino (Dräger, 2015). Näiden tukikeinojen avulla voidaan tukea lapsia, joilla on matemaattisia oppimisvaikeuksia. Suomessa käytettyjä tutkimusperustaisia harjoitusohjelmia on Nallematikka (Mattinen ym., 2010), Minäkin lasken! – harjoitusohjelma (Van Luit ym., 2010), SELKIS – yhteenlaskua ymmärtämään (Koponen ym., 2011) ja Ekapeli Matikka. Näiden harjoitusohjelmien vaikuttavuutta on tutkittu ja niiden on todettu olevan tehokkaita keinoja matematiikan oppimisen tukemisessa.

## 7 Pohdinta

Tutkielmani aiheeseen liittyen löytyi omista odotuksista poiketen suhteellisen hyvin tutkimuskirjallisuutta. Tutkielmassa hyödynsin sekä suomenkielisiä että englanninkielisiä tutkimusjulkaisuja. Käyttämäni painetut lähteet ovat sellaisia teoksia, jotka voidaan lukea aiheeni peruskirjallisuuteen. Hyödyntämäni lähteet ovat pääsääntöisesti vertaisarvioituja, niitä on hyödynnetty alan kirjallisuudessa ja ne ovat julkaistu luotettavilla alustoilla.

Tutkielman tekemisessä haasteena oli löytää tuoreita ja uusia tutkimusjulkaisuja. Ajoittain tutkielmassa onkin hyödynnetty vanhempia lähteitä, mutta niitä voidaan pitää vieläkin paikkaansa pitävinä, sillä niihin on viitattu uudemmissa kirjallisuusteoksissa. Esille tuomani seulat ja testit ovat suhteellisen vanhoja, eikä niitä ole päivitetty. Onkin siis pohdittava, ovatko ne vielä paikkaansa pitäviä ja mittaavatko ne nykyisinkin oikeita asioita.

Matematiikan oppimisen käsittely keskittyy pääasiallisesti varhaisten matemaattisten taitojen tarkasteluun. Tämä johtuu siitä, että ongelmat matematiikan oppimisessa ilmenevät yleensä juuri näissä taidoissa ja myös tukitoimia kohdistetaan hierarkkisesti varhaisimpiin taitoihin. Tutkimukset osoittavat, että matemaattisessa osaamisessa ilmenee eroja jo ennen kouluikää ja erot osaamisessa kasvavat entisestään peruskoulussa. Vaikuttaa siis siltä, että varhaisilla matemaattisilla taidoilla on suuri merkitys lasten matematiikan oppimiselle ja niiden merkitys tulisi ottaa huomioon jo varhaiskasvatuksesta lähtien. Lisäksi tuntemalla varhaiset matemaattiset taidot ja niiden kehityksen voidaan mahdollisesti tunnistaa varhain ne lapset, joilla matemaattisia oppimisvaikeuksia ilmenee.

Kuten oletin, matemaattisia oppimisvaikeuksia on tutkittu huomattavasti vähemmän kuin esimerkiksi lukemisen ja kirjoittamisen oppimisvaikeuksia. Löytämissäni tutkimusjulkaisuissa ja tutkimuskirjallisuudessa on matemaattisia oppimisvaikeuksia määritelty eri tavoin, eikä selkeää ja yhteisesti hyväksyttyä termiä ole saavutettu. Matemaattiset oppimisvaikeudet on käsitteenä mielestäni pätevä, sillä se kuvaa hyvin matemaattisten oppimisvaikeuksien tuomien haasteiden monimuotoisuutta. Käsite kattaa sekä dyskalkulian, että heikon matemaattisen osaamisen, joiden välille on turha tehdä eroa koulukontekstissa, sillä molemmat ryhmät tarvitsevat tukea oppimiseen joka tapauksessa.

Ongelmat matematiikan oppimisessa ilmenevät eri tavalla eri oppijoilla. On kuitenkin hyvä tunnistaa ne yleisimmät haasteet, joita oppimisvaikeuden omaavilla usein ilmenee. Tiedostamalla nämä haasteet, voi kasvatustieteen ammattilaiset tunnistaa tehokkaammin ja varhaisessa

vaiheessa ne oppilaat, jotka tarvitsevat tukea oppimisessaan. On kuitenkin huolestuttavaa, että suuri osa matematiikassa heikosti suoriutuvista oppilaista ei ole saanut ollenkaan lisätukea tai on saanut sitä vähän. On siis ilmeistä, että matemaattisiin oppimisvaikeuksiin kaivataan enemmän tukea. Tukemalla oppilaita, joilla on haasteita matematiikassa, voidaan mahdollisesti ehkäistä oppimisvaikeuksien negatiivisia vaikutuksia kuten opintojen keskeytymistä ja työttömyyttä.

Tutkielmani osoittaa, että matematiikan oppimiseen olisi hyvä kiinnittää huomiota jo varhaisessa vaiheessa ja varhaisilla matemaattisilla taidoilla on iso merkitys matematiikan oppimisessa ja matemaattisessa osaamisessa. Myös mahdolliset oppimisen haasteet ilmenevät näissä perustaidoissa. Jatkossa olisikin mielenkiintoista tutkia, miten varhaiskasvatuksessa huomioidaan varhaiset matemaattiset taidot ja niiden kehittäminen. Lisäksi voitaisiin kartoittaa sitä, miten varhaiskasvatuksessa sekä esi- ja alkuopetuksessa matemaattista osaamista arvioidaan ja kuinka oppimisen haasteissa tuetaan.

## 8 Lähteet

- Alen, R. & Kultti-Lavikainen, N. (2018a). Laaja-alaiset oppimisvaikeudet. Kustannus Oy Duodecim. Haettu 31.3.2020: [https://www.oppiportti.fi/op/lne00038/do?p\\_haku=oppimisvaikeudet#q=oppimisvaikeudet](https://www.oppiportti.fi/op/lne00038/do?p_haku=oppimisvaikeudet#q=oppimisvaikeudet)
- Alen, R. & Kultti-Lavikainen, N. (2018b). Kapea-alaiset oppimisvaikeudet. Kustannus Oy Duodecim. Haettu 31.3.2020: [https://www.oppiportti.fi/op/lne00035/do?p\\_haku=oppimisvaikeudet#q=oppimisvaikeudet](https://www.oppiportti.fi/op/lne00035/do?p_haku=oppimisvaikeudet#q=oppimisvaikeudet)
- Aro, T., Ahonniska-Assa, J., Aro, M. & Ahonen, T. (2019). Oppimisen vaikeuksien tunnistaminen ja arviointi. Teoksessa T. Ahonen, M. Aro, T. Aro, M-K. Lerkkanen & T. Siiskonen (toim.), *Oppimisen vaikeudet*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 40–64.
- Aro, M., Aro, T., Koponen, T. & Viholainen, H. (2012). Oppimisvaikeudet. Teoksessa M. Jahnukainen (toim.), *Lasten erityishuolto- ja opetus Suomessa*. Tampere: Vastapaino, 299–331.
- Aro, M. & Lerkkanen, M-K. (2019). Lukutaidon kehitys ja lukemisvaikeudet. Teoksessa T. Ahonen, M. Aro, T. Aro, M-K. Lerkkanen & T. Siiskonen (toim.), *Oppimisen vaikeudet*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 252–289.
- Attout, L. & Majerus, S. (2015). Working memory deficits in developmental dyscalculia, The importance of serial order. *Child Neuropsychology*, 21:4, 432–450. doi: 10.1080/09297049.2014.92217
- Aunio, P. (2008). Matemaattiset taidot ennen koulun alkua. *NMI Bulletin*, 18:4, 63–74.
- Aunio, P., Hannula, M. & Räsänen, P. (2004) Matemaattisten taitojen varhaiskehitys. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 198–221.
- Aunio, P., Hautamäki, J. & Mononen, R. (2018). Matematiikan oppimisen ja oppimisvaikeuksien pedagoginen arviointi. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 240–256
- Aunio, P., Heiskari, P., Van Luit, J.E.H & Vuorio, J-M. (2014). The development of early numeracy skills in kindergarten in low-, average- and high-performance groups. *Journal of Early Childhood Research*. doi: 10.1177/1476718X14538722

- Aunio, P. & Niemivirta, M. (2010). Predicting children's mathematical performance in grade one by early numeracy. *Learning and Individual Differences*, 20, 427–435. doi: 10.1016/j.lindif.2010.06.003
- Aunio, P. & Räsänen, P. (2015). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years – a working model for educators, *European Early Childhood Education Research Journal*. 24:5, 684–704. doi: 10.1080/1350293X.2014.996424
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J.-E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96:4, 699–713. doi: 10.1037/0022-0663.96.4.699
- Aunola, K. & Nurmi, J.-E. (2018). Matemaattisten taitojen kehitys kouluiässä. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 54–68.
- Bryant, B. R., Bryant, D. P., Portfield, J., Dennis, M. S., Falcomata, T., Valentine, C., Brewer, C. & Bell, K. (2016). The effects of a tier 3 intervention on the mathematics performance of second grade students with severe mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 49:2, 176–188. doi: 10.1177/0022219414538516
- Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 46, 3–18. doi: 10.1111/j.1469-7610.2005.00374.x
- Desoete, A., Ceulemans, A., De Weerdt, F. & Pieters, S. (2012). Can we predict mathematical learning disabilities from symbolic and non-symbolic comparison tasks in kindergarten? Findings from a longitudinal study. *British Journal of Educational Psychology*, 82, 64–81. doi: 10.1348/2044-8279.002002
- Dräger, M. (2015). *Matikkaluotsi: Matematiikkavaikeuden tunnistaminen ja kuntouttava opetus*. Helsinki: ELLI Early Learning.
- Eskola, J. & Suoranta, J. (1998). *Johdatus laadulliseen tutkimukseen*. Tampere: Vastapaino.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Cirino, P. T., & Fletcher, J. M. (2008). Intensive Intervention for Students with Mathematics Disabilities: Seven Principles of Effective Practice. *Learning Disability Quarterly*, 31:2, 79–92. doi:10.2307/20528819
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and Learning Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37:1, 4–15. doi:10.1177/00222194040370010201
- Geary, D. C. (2011). Consequences, characteristics, and causes of mathematical learning disabilities and persistent low achievement in mathematics. *Journal of Developmental & Behavioral Pediatrics*, 33, 250–263 doi: 10.1097/DBP.0b013e318209edef



- Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Caven, J., Nugent, L. & Numtee, C. (2007). Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development*, 78:4, 1343–1359. doi: 10.1111/j.1467-8624.2007.01069.x
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L. & Bailey, D. H. (2012). Mathematical Cognition Deficits in Children With Learning Disabilities and Persistent Low Achievement: A Five-Year Prospective Study. *Journal of Educational Psychology*, 104:1, 206–223. doi: 10.1037/a0025398
- Ikäheimo, H., Putkonen, H. & Voutilainen, E. (2002). *Makeko 1-9. Matematiikan keskeisen oppiaineen kokeet luokille 1-9*. Helsinki, Opperi.
- Kantelinen, S. & Vierikko, E. (2017). Varhaisen puuttumisen merkitys lapsen matematiikan oppimiselle koulussa. *NMI-bulletin*, 27:2, 40–56.
- Kiviniemi, K. (2007). Laadullinen tutkimus prosessina. Teoksessa R. Valli & J. Aaltola (toim.) *Ikkunoita tutkimusmetodeihin 2. Näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin*. Juva: Bookwell Oy, 74–88.
- Koponen, T. (2012). Peruslaskutaito matematiikan kivijalkana. *NMI-bulletin*, 22:2, 59–62.
- Koponen, T., Mononen, R., Kumpulainen, T. & Puura, P. (2011). *Selkis! - Yhteenlaskua ymmärtämään*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti: Haukkarannan koulu.
- Koponen, T., Mononen, R. & Puura, P. (2018). Matematiikan opetus ja kielellinen erityisvaikeus. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 202–219.
- Koponen, T., Salminen, J. & Sorvo, R. (2019). Matematiikan perustaitojen oppimisvaikeudet. Teoksessa T. Ahonen, M. Aro, T. Aro, M-K. Lerkkanen & T. Siiskonen (toim.), *Oppimisen vaikeudet*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti. 324–349
- Korhonen, J., Hakkarainen, A., Holopainen, L., Linnanmäki, K., Savolainen, H. & Taipale, A. (2018). Matematiikan vaikeudet ja nuorten koulutuspolut. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 258–275.
- Korhonen, J., Linnanmäki, K. & Aunio, P. (2012). Language and Mathematical Performance: a Comparison of Lower Secondary School Students with Different Level of Mathematical Skills. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 56, 333-344. doi: 10.1080/00313831.2011.599423.

- Korhonen, J., Linnanmäki, K. & Aunio, P. (2014). Learning difficulties, academic well-being and educational dropout: A person-centred approach. *Learning and Individual Differences*, 31, 1–10. doi: 10.1016/j.lindif.2013.12.011
- Kroesbergen, E., Van Luit, J.E.H. & Maas, C. (2004). Effectiveness of Explicit and Constructivist Mathematics Instruction for Low-Achieving Students in the Netherlands. *The Elementary School Journal*, 104:3, 176–188. doi: 10.1086/499751.
- Kuikka, P. (2014). Minkä oppiminen on vaikeaa laaja-alaisissa oppimisvaikeuksissa? Teoksessa V. Närhi, H. Seppälä & P. Kuikka (toim.), *Laaja-alaiset oppimisvaikeudet*. Porvoo: Bookwell Oy, 42–57.
- Kuikka, P., Närhi, V. & Seppälä, H. (2014). Laaja-alaisen oppimisvaikeuksien tarkastelukulmia. Teoksessa V. Närhi, H. Seppälä & P. Kuikka (toim.), *Laaja-alaiset oppimisvaikeudet*. Porvoo: Bookwell Oy, 28–40.
- Kyttälä, M. (2008). Visuaalis-spatiaalinen työmuisti: rajallisen kapasiteetin työtila matematiikan oppimisen ja matematiikassa suoriutumisen tukena. *Psykologia*, 43:5, 342–350.
- Kyttälä, M. (2010). Matemaattisilta taidoiltaan heikkojen lasten ja nuorten visuaalis-spatiaaliset työmuistivalmiudet. *NMI-bulletin*, 20:1, 4–24.
- Kyttälä, M. & Kanerva, K. (2018). Työmuisti ja matemaattiset taidot. Teoksessa J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.), *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 220–239.
- Lampinen, A., Ikäheimo, H. & Dräger, M. (2007). *MAVALKA eli Matematiikan valmiuksien kartoitus*. Helsinki: Opperi.
- Lerkkanen, M-K., Ahonen, T., Ketonen, R. & Leppänen, U. (2019). Kirjoittamisen vaikeudet. Teoksessa T. Ahonen, M. Aro, T. Aro, M-K. Lerkkanen & T. Siiskonen (toim.), *Oppimisen vaikeudet*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 304–322.
- Lindholm, P., Loukusa, S. & Paavola-Ruotsalainen, L. (2016). Puheen, kielen, motoriiikan ja oppimiskyvyn kehityshäiriöt. Teoksessa K. Kumpulainen, E. Aronen, H. Ebeling, E. Laukkanen, M. Marttunen, K. Puura & A. Sourander (toim.), *Lastenpsykiatria ja nuorisopsykiatria*. Helsinki: Kustannus Oy Duodecim, 203–216.
- Lipton, J. S., & Spelke, E. S. (2003). Origins of Number Sense: Large-Number Discrimination in Human Infants. *Psychological Science*, 14:5, 396–401. doi: 10.1111/1467-9280.01453
- LukiMat-verkkopalvelu. [www.lukimat.fi](http://www.lukimat.fi). Viitattu 18.4.2020.
- Lusetti, E. & Aunio, P. (2012). Esikoululaisten matemaattisten taitojen kehityksen tukemine Minäkin lasken! -harjoitusohjelmalla. *NMI-bulletin*, 22:3, 14–27.

- Mattinen, A., Räsänen, P., Hannula, M. M. & Lehtinen, E. (2008). Varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämisohjelma päiväkodeille. *NMI-bulletin*, 18:4, 40–53.
- Mattinen, A., Räsänen, P., Hannula, M. M. & Lehtinen, E. (2010). Nallematikka: 4–5-vuotiaiden lasten oppimisvalmiuksien kehittäminen - pilottitutkimuksen tulokset. *NMI-bulletin*, 20:2, 41–59.
- Mazzocco, M. M. M. (2007). Defining and differentiating mathematical learning disabilities and difficulties. Teoksessa D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (toim.), *Why is math so hard for some children?: The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*. Baltimore, Md: Paul H. Brookes Pub. Co, 29–47.
- Merkley, R. & Ansari, D. (2016). Why numerical symbols count in the development of mathematical skills: Evidence from brain and behavior. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 10, 14–20. doi: 10.1016/j.cobeha.2016.04.006.
- Metsämuuronen, J. (2006). Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä. 2 laitos. 3. painos. Helsinki: International Methelp.
- Micallef, S. & Prior, M. (2004). Arithmetic learning difficulties in children. *Educational Psychology*, 24:2, 175–200. doi: 10.1080/0144341032000160137
- Mikkonen, K., Nikander, K. & Voutilainen, A. (2015). Oppimisvaikeuksien tunnistaminen ja tukeminen. *Lääkärilehti*, 12/15. Haettu 31.3.2020: <https://www.potilaanlaakarilehti.fi/artikkelit/oppimisvaikeuksien-tunnistaminen-ja-tukeminen/>
- Mononen, R., Aunio, P., Hotulainen, R. & Ketonen, R. (2013). Matematiikan osaaminen ensimmäisen luokan alussa. *NMI Bulletin*, 23:4, 12–25.
- Mononen, R., Aunio, P., Väisänen, E., Korhonen, J. & Tapola, A. (2017). *Matemaattiset oppimisvaikeudet*. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Murphy, M. M., Mazzocco, M. M. M., Hanich, L. B. & Early, M. C. 2007. Cognitive characteristics of children with mathematics learning disability (MLD) vary as a function of the cutoff criterion used to define MLD. *Journal of Learning Disabilities*, 40:5, 458–476. doi: 10.1177/00222194070400050901
- Nylund, T. (2011). Oppimisvaikeudet. Kustannus Oy Duodecim. Haettu 31.3.2020: [https://www.oppoportti.fi/op/ote00096/do?p\\_haku=oppimisvaikeudet#q=oppimisvaikeudet](https://www.oppoportti.fi/op/ote00096/do?p_haku=oppimisvaikeudet#q=oppimisvaikeudet)
- Opetushallitus. (2014a). Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Määräykset ja ohjeet 2016:1.
- Opetushallitus. (2014b). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Määräykset ja ohjeet 2014:96.

- Opetushallitus. (2018). Varhaiskasvatussuunnitelman perusteet 2018. Määräykset ja ohjeet 2018:3a.
- Parrila, R., Gadsden, D. & Aro, M. (2019). Näyttöön perustuva tuki oppimisen vaikeuksissa. Teoksessa T. Ahonen, M. Aro, T. Aro, M-K. Lerkkanen & T. Siiskonen (toim.), *Oppimisen vaikeudet*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti. 66–76.
- Perusopetuslaki 642/24.6.2010, 30 §: Oikeus saada opetusta. Viitattu 19.4.2020. <https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/1998/19980628#L7P30>.
- Räsänen, P. (2004). *RMAT-laskutaidon testi 9-12-vuotiaille: Käsikirja*. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti.
- Räsänen, P. (2005). BANUCA: Basic numerical and calculation abilities = Lukukäsitteen ja laskutaidon hallinnan testi. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Räsänen, P. (2012). Laskemiskyvyn häiriö eli dyskalkulia. *Duodecim: lääketieteellinen aikakauskirja*, 128:11, 1168–1177.
- Räsänen, P. & Ahonen, T. (2004). Oppimisvaikeudet matematiikassa - neuropsykologinen näkökulma. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, 274–300.
- Räsänen, P. & Koponen, T. (2010). Matemaattisten oppimisvaikeuksien neuropsykologisesta tutkimuksesta. *NMI Bulletin*, 20:3, 39–53.
- Räsänen, P., Närhi, V. & Aunio, P. (2010). Matematiikassa heikosti suoriutuvat oppilaat perusopetuksen 6. luokan alussa. Teoksessa E.K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008*. Helsinki: Opetushallitus, 165–203.
- Salminen, A. (2011). *Mikä kirjallisuuskatsaus? Johdatus kirjallisuuskatsauksen tyyppeihin ja hallintotieteellisiin sovelluksiin*. Vaasa: Vaasan yliopisto.
- Salminen, J. (2016). Matematiikan oppimisvaikeudet: riskin tunnistaminen ja varhaisen tuen vaste. *NMI Bulletin*, 26-4, 4–10.
- Salminen, J. (2015). *Response to computer-assisted intervention in children most at risk for mathematics difficulties*. Jyväskylä studies in education, psychology and social research, 543. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.
- Shalev, R. S. (2007). Prevalence of Developmental Dyscalculia. Teoksessa D. B. Berch & M. M. M. Mazzocco (toim.), *Why is math so hard for some children?: The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*. Baltimore, Md: Paul H. Brookes Pub. Co, 49–60.

- Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2018). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.
- Van Luit, J. E. H., Aunio, P. & Räsänen, P. (2010). *Minäkin lasken! - lasten lukukäsitteen harjoitusohjelma: Käsikirja*. Jyväskylä: Niilo Mäki -instituutti.
- Van Luit, J. E. H., Van de Rijt, B. A. M. & Aunio, P. (2006). *Lukukäsitetesti: Käsikirja*. Helsinki: Psykologien kustannus.
- Väisänen, E. & Aunio, P. (2014). Matematiikkainterventio heikkojen ensiluokkalaisten oppimisen tukena. *Journal of Early Childhood Education Research*, 3:2, 48–75.
- Wynn K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, 358:6389. 49–50 doi: 10.1038/358749a0